



**Негосударственное частное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Технический университет УГМК»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ  
РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

<b>Направление подготовки</b>	<u>13.03.02 Электроэнергетика и электротехника</u>
<b>Профиль подготовки</b>	<u>Электрооборудование и электрохозяйство горных и промышленных предприятий</u>
<b>Уровень высшего образования</b>	<u>бакалавриат</u>

Автор-разработчик: Ахлюстина Наталия Вениаминовна, Доцент, канд.техн.наук, старший научный сотрудник

Рассмотрено на заседании кафедры гуманитарных и естественно-научных дисциплин  
Одобрено Методическим советом университета 30 июня 2021 г., протокол № 4

г. Верхняя Пышма  
2021

Методические указания к выполнению контрольной работы составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины.

Контрольная работа является составной частью самостоятельной работы обучающихся дисциплине «Техническая механика». Выполнение контрольных работ имеет целью закрепление обучающимися полученных на лекциях теоретических знаний и практического опыта, приобретенного на практических занятиях, путем самостоятельной работы.

### Сложное движение точки

**Теорема о сложении скоростей:** при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

$$\vec{v}_{аб} = \vec{v}_{от} + \vec{v}_{пер}.$$

Если угол между векторами  $\vec{v}_{от}$  и  $\vec{v}_{пер}$  равен  $\alpha$ , то по модулю

$$v_{аб} = \sqrt{v_{от}^2 + v_{пер}^2 + 2v_{от}v_{пер}\cos\alpha}.$$

**Теорема о сложении ускорений:** при сложном движении ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и кориолисова.

$$\vec{a}_{аб} = \vec{a}_{от} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}$$

Кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению переносной угловой скорости тела на относительную скорость точки.

$$\vec{a}_{кор} = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_{от}).$$

Модуль кориолисова ускорения, если угол между векторами  $\vec{\omega}$  и  $\vec{v}_{от}$  обозначить  $\alpha$ , будет равен

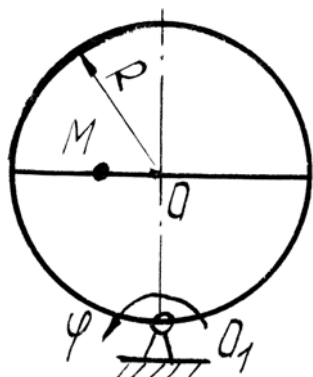
$$a_{кор} = 2|\omega||v_{от}|\sin\alpha.$$

### Задачи для самостоятельного решения

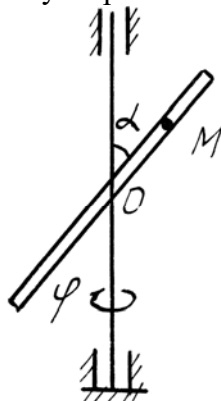
**Задача 6.1.** Круглая пластина радиуса  $R = 0,2$  м вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости пластины и проходящей через точку  $O_1$ , по закону  $\varphi = t^2$  рад. Точка  $M$  движется по закону  $OM = S_r = 0,2 t^3$  м. Определить абсолютное ускорение точки  $M$  при  $t = 1$  с.

**Задача 6.2.** Стержень вращается вокруг неподвижной вертикальной оси по закону,  $\varphi = t^2$  рад. Точка  $M$  движется по закону  $OM = S_r = 0,2 t^3$  м. Определить абсолютное ускорение точки  $M$  при  $t = 1$  с, если  $\alpha = 30^\circ$ .

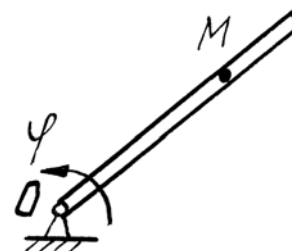
**Задача 6.3.** Стержень вращается вокруг оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через точку  $O$ , по закону  $\varphi = 2t^2$  рад. Точка  $M$  движется вдоль стержня по закону,  $OM = S_r = 0,4 t^3$  м. Определить абсолютную скорость и ускорение Кориолиса точки  $M$  при  $t = 1$  с.



К задаче 6.1.



К задаче 6.2.

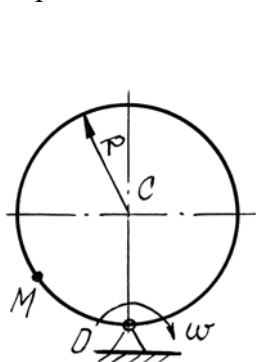


К задаче 6.3.

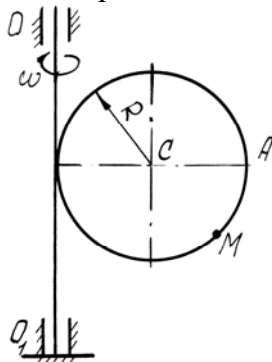
**Задача 6.4.** Диск радиуса  $R = 0,5$  м вращается вокруг неподвижной оси, перпендикулярной диску и проходящей через точку  $O$ , с угловой скоростью  $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ . По ободу диска движется точка  $M$  по закону  $OM = S_r = 0,5 \pi R t^2$  м. Определить абсолютное ускорение точки  $M$  в момент времени  $t = 1$  с.

**Задача 6.5.** Диск радиуса  $R = 0,5$  м вращается вокруг неподвижной оси  $OO_1$  с угловой скоростью  $\omega = 2 t \text{ с}^{-1}$ . По ободу диска движется точка  $M$  по закону  $AM = S_r = \pi t$  м. Определить абсолютное ускорение точки  $M$  в момент времени  $t = 1$  с.

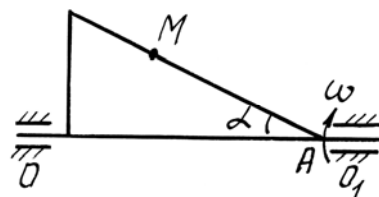
**Задача 6.6.** Прямоугольный треугольник вращается' вокруг, оси  $OO_1$  с постоянной угловой скоростью  $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ . По стороне треугольника движется точка  $M$  по закону  $AM = S_r = 0,4 t$  м. Определить ускорение точки  $M$  в момент времени  $t = 1$  с, если  $\alpha = 30^\circ$ .



К задаче 6.4



К задаче 6.5

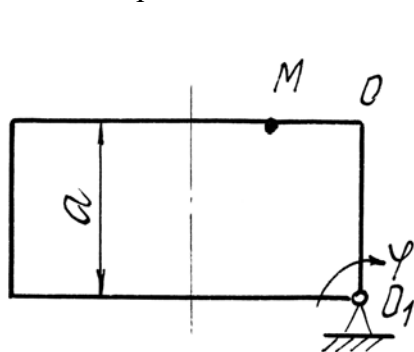


К задаче 6.6

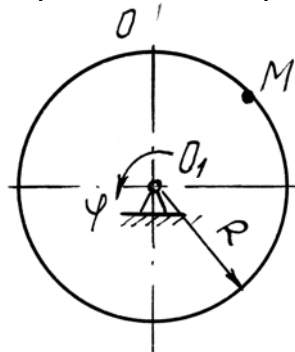
**Задача 6.7.** Прямоугольная пластина вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости пластины и проходящей через точку  $O_1$ , по закону  $\varphi = 2t^2$  рад. Точка  $M$  движется по закону  $OM = S_r = 0,6 t^2$  м. Определить абсолютное ускорение точки  $M$  при  $t = 1$  с, если  $a = 0,6$  м.

**Задача 6.8.** Диск радиуса  $R = 0,5$  м вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через центр  $O_1$ , по закону  $\varphi = 2t^2$  рад. Точка  $M$  движется по закону  $OM = S_r = \pi t^2$  м. Определить абсолютную скорость и ускорение Кориолиса точки  $M$  при  $t = 1$  с.

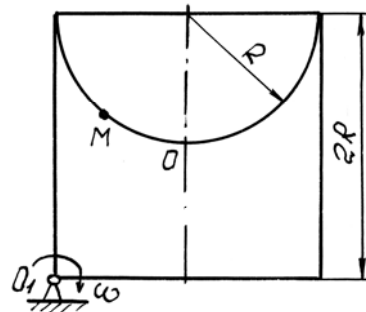
**Задача 6.9.** Пластина вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости пластины и проходящей через точку  $O_1$ , с угловой скоростью  $\omega = t^2 \text{ с}^{-1}$ . Точка  $M$  движется по закону  $OM = S_r = 0,5\pi t$  м. Определить абсолютное ускорение точки  $M$  при  $t = 1$  с, если  $R = 1$  м.



К задаче 6.7



К задаче 6.8

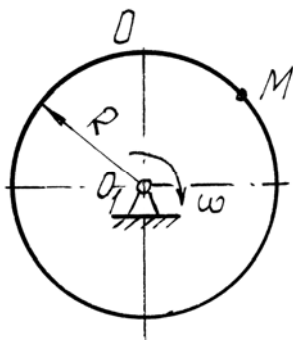


К задаче 6.9

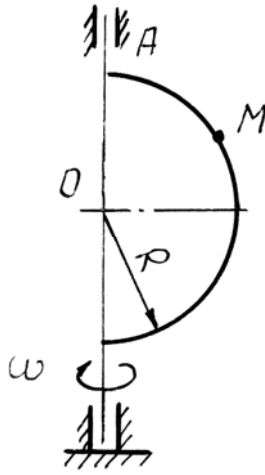
**Задача 6.10.** Диск вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр  $O_1$ , с угловой скоростью  $\omega = t^3 \text{ с}^{-1}$ . По ободу диска движется точка  $M$  по закону  $OM = S_r = 2\pi t^3$  м. Определить абсолютное ускорение точки  $M$  в момент времени  $t = 1$  с, если радиус диска  $R = 0,2$  м.

**Задача 6.11.** Полудиск радиуса  $R = 2$  м вращается вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью  $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ . По его ободу движется точка  $M$  по закону  $OM = S_r = \pi R t$  м. Определить абсолютное ускорение точки  $M$  в момент времени  $t = 1/3$  с.

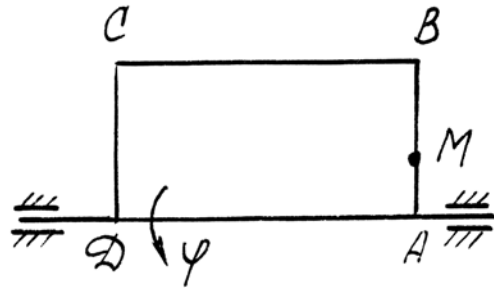
**Задача 6.12.** Прямоугольная пластина вращается вокруг стороны  $AD$  по закону  $\varphi = 3t^3$  рад. По стороне  $AB$  движется точка по закону  $AM = S_r = 3 t$  м. Определить абсолютное ускорение точки  $M$  в момент времени  $t = 1$  с.



К задаче 6.10



К задаче 6.11

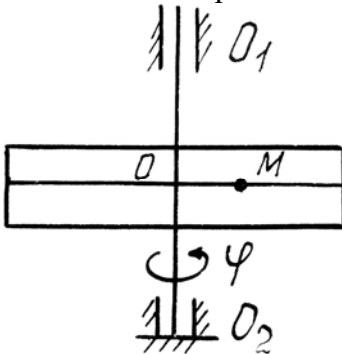


К задаче 6.12

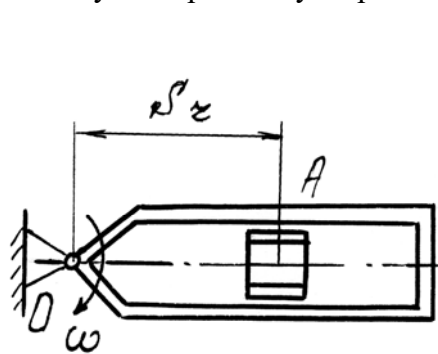
**Задача 6.13.** Пластина вращается вокруг вертикальной оси  $O_1O_2$  по закону  $\varphi = 2t^2$  рад. Точка  $M$  движется по закону  $OM = S_r = 0,2 t^2$  м. Определить абсолютное ускорение точки  $M$  при  $t = 1$  с.

**Задача 6.14.** Кулиса вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = 2\text{с}^{-1}$  вокруг оси, перпендикулярной к плоскости кулисы и проходящей через точку  $O$ . Ползун  $A$  движется в направляющих кулисы по закону  $OM = S_r = t^2$  м. Определить абсолютное ускорение ползуна при  $t = 1$  с.

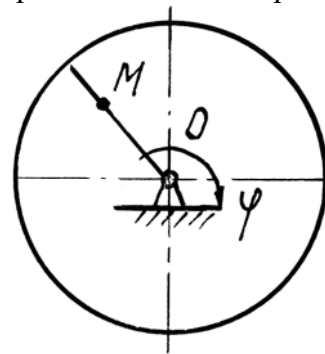
**Задача 6.15.** Диск  $R = 2$  м вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через центр  $O$ , по закону  $\varphi = 2t^2$  рад. Вдоль радиуса движется точка  $M$  по закону  $OM = S_r = 4\pi t^2$  м. Определить абсолютную скорость и ускорение Кориолиса точки  $M$  при  $t = 1$  с.



К задаче 6.13



К задаче 6.14

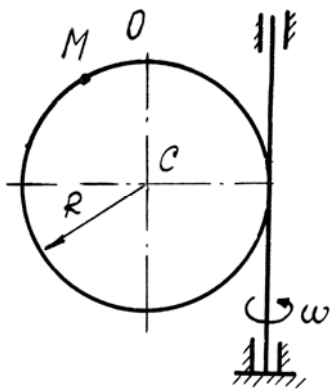


К задаче 6.15

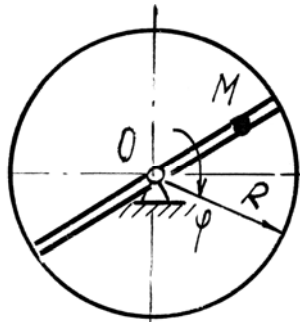
**Задача 6.16.** Круглая пластина радиуса  $R = 0,5$  м вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega = 2 t \text{с}^{-1}$ . Точка  $M$  движется по закону  $OM = S_r = 0,2\pi t^2$  м. Определить абсолютное ускорение точки  $M$  при  $t = 1$  с.

**Задача 6.17.** Круглая пластина радиуса  $R = 1$  м вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости пластины и проходящей через центр  $O$ , по закону  $\varphi = 3t^2$  рад. Точка  $M$  движется по закону  $OM = S_r = 0,4 t^3$  м. Определить абсолютное ускорение точки  $M$  при  $t = 1$  с.

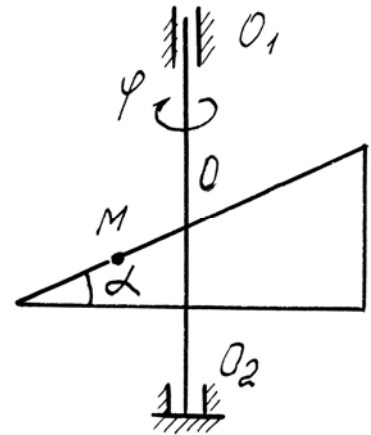
**Задача 6.18.** Пластина вращается вокруг вертикальной оси  $O_1O_2$  по закону  $\varphi = 2t$  рад. Точка  $M$  движется по закону  $OM = S_r = 0,1 t^3$  м. Определить абсолютное ускорение точки  $M$  при  $t = 1$  с, если  $\alpha = 60^\circ$ .



К задаче 6.16



К задаче 6.17

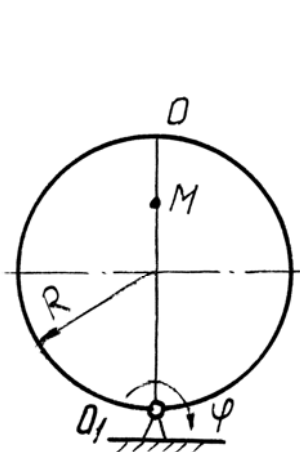


К задаче 6.18

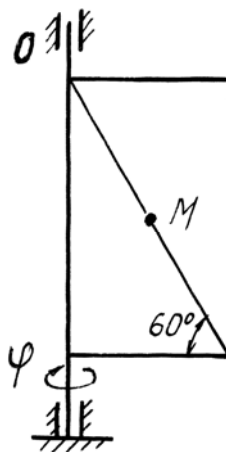
**Задача 6.19.** Диск вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через точку  $O_1$ , по закону  $\varphi = 2t^2$  рад. По диаметру диска движется точка  $M$  по закону  $OM = S_r = 0,4 t^2$  м. Определить абсолютное ускорение точки  $M$  при  $t = 1$  с, если радиус диска  $R = 1$  м.

**Задача 6.20.** Пластина вращается вокруг вертикальной оси по закону  $\varphi = 3t^2$  рад. Точка  $M$  движется по закону  $OM = S_r = 0,8 t^2$  м. Определить абсолютную скорость и ускорение Кориолиса точки  $M$  при  $t = 1$  с.

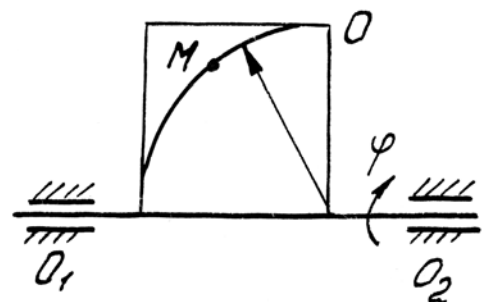
**Задача 6.21.** Пластина вращается вокруг горизонтальной оси  $O_1O_2$  по закону  $\varphi = 2t$  рад. Точка  $M$  движется по закону  $OM = S_r = 0,25 \pi^2 t^2$  м. Определить абсолютное ускорение точки  $M$  при  $t = 1$  с, если  $R = 1$  м.



К задаче 6.19



К задаче 6.20

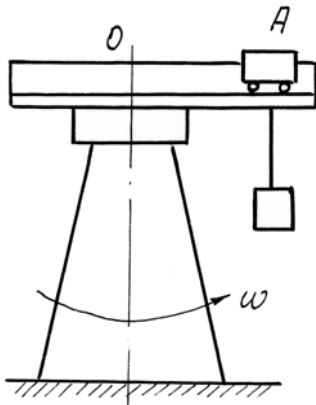


К задаче 6.21

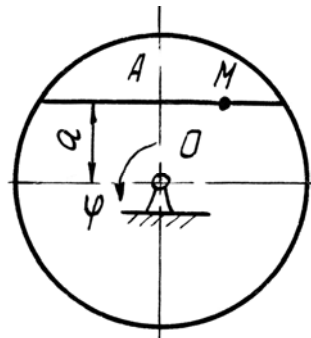
**Задача 6.22.** Башенный кран вращается равномерно с угловой скоростью  $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ . Крановая тележка  $A$  перемещается по стреле по закону  $OA = S_r = 2 t^2$  м. Определить абсолютное ускорение тележки в момент времени  $t = 1$  с.

**Задача 6.23.** Диск вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через центр  $O$ , по закону  $\varphi = 2t^2$  рад. Точка  $M$  движется по закону  $AM = S_r = 0,4 t^2$  м. Определить абсолютное ускорение точки  $M$  в момент  $t = 1$  с, если  $a = 0,3$  м.

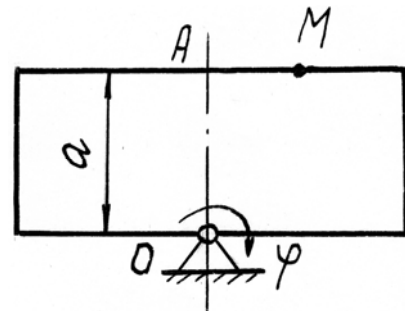
**Задача 6.24.** Прямоугольная пластина вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости пластины и проходящей через точку  $O$ , по закону  $\varphi = 4t$  рад. Точка  $M$  движется по закону  $OM = S_r = 4 t^2$  м. Определить абсолютное ускорение точки  $M$ , при  $t = 1$  с, если  $a = 3$  м.



К задаче 6.22



К задаче 6.23

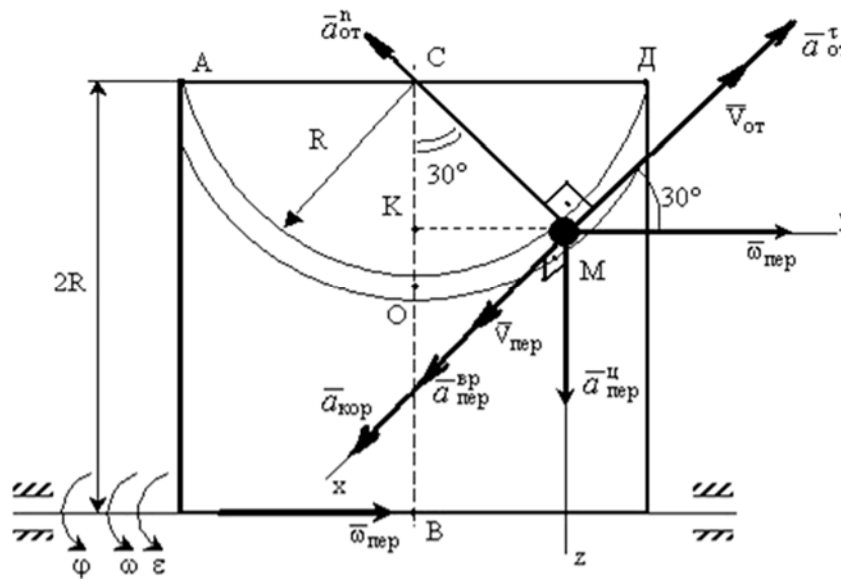


К задаче 6.24

### Примеры решения задач

**Задача 1.** Пластина вращается вокруг горизонтальной оси по закону  $\varphi = 2t^2$  рад (положительное направление отсчета угла  $\varphi$  показано на рисунке дуговой стрелкой). По дуге радиуса  $R = 0,5$  м движется точка  $M$  по закону  $s = OM = \pi R \frac{t^3}{6}$  м; положительное направление отсчета криволинейной координаты  $s$  от  $O$  к  $D$ .

Определить абсолютную скорость  $v_{аб}$  и абсолютное ускорение  $a_{аб}$  в момент времени  $t = 1$  с.



К задаче 1.

**Решение:** Рассмотрим движение точки  $M$  как сложное, считая ее движение по дуге относительным, а движение вместе с пластиной - переносным.

Определим все характеристики относительного и переносного движений.

**Относительное движение.** Это движение происходит по закону

$$s = OM = \frac{\pi R}{4} (7t - 2t^2).$$

Сначала установим, где будет находиться точка  $M$  на дуге  $AOD$  в момент времени  $t=1$  с.

Полагая в уравнении движения  $t=1$  с, получим  $s_1 = \frac{5}{6} \pi R$ . Тогда  $\angle OCM = \frac{s_1}{R} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$ . Покажем на рисунке точку в положении, определяемом этим углом.

Теперь находим численные значения  $v_{ом}$ ,  $a_{ом}^\tau$  и  $a_{ом}^n$ :

$$v_{om} = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi R}{6} 3t^2; a_{om}^{\tau} = \frac{dv_{от}}{dt} = \pi R t; a_{om}^n = \frac{v_{om}^2}{\rho_{om}} = \frac{v_{om}^2}{R},$$

где  $\rho_{om}$  - радиус кривизны относительной траектории.

Для момента времени  $t=1$ с, учитывая, что  $R = 0,5$  м, получим:

$$v_{om} = \frac{\pi R}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ м/с}; a_{om}^{\tau} = \frac{\pi}{2} \text{ м/с}^2; a_{om}^n = \frac{\pi^2}{8} \text{ м/с}^2.$$

Знаки показывают, что вектор  $\vec{v}_{от}$  направлен в сторону положительного отсчета  $s$ , вектор  $\vec{a}_{om}^{\tau}$  - в ту же сторону; вектор  $\vec{a}_{om}^n$  направлен к центру  $C$  по радиусу  $MC$ .

**Переносное движение.** Это движение пластины (вращение) происходит по закону  $\varphi = 2t^2$ . Найдем угловую скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$  переносного вращения:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 4t, \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 4.$$

Таким образом, при  $t = 1$ с;

$$\omega = 4\text{с}^{-1}; \varepsilon = 4\text{с}^{-2}.$$

Для определения  $v_{nep}$  и  $a_{nep}$  найдем сначала расстояние точки  $M$  от оси вращения:  $h = KB = 2R - R \cdot \cos 30^\circ$ .

Тогда в момент времени  $t=1$ с получим:  $h = 0,57$ м.

$$v_{nep} = \omega \cdot h = 4 \cdot 0,57 = 2,28 \text{ м/с};$$

$$a_{nep}^{ep} = \varepsilon \cdot h = 4 \cdot 0,57 = 2,28 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{nep}^u = \omega^2 \cdot h = 16 \cdot 0,57 = 9,12 \text{ м/с}^2.$$

Показываем на рисунке вектор  $\vec{v}_{nep}$  с учетом направления  $\omega$  и векторы  $\vec{a}_{nep}^u$  (направлен к оси вращения),  $\vec{a}_{nep}^{ep}$  (направлен как  $\vec{v}_{nep}$ ).

Кориолисово ускорение. Так как угол между вектором  $\vec{v}_{om}$  и вектором  $\vec{\omega}$  равен  $30^\circ$ , то численно в момент времени  $t = 1$ с

$$a_{кор} = 2 |\vec{v}_{om}| |\vec{\omega}| \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 3,14 \text{ м/с}^2.$$

Направление вектора  $\vec{a}_{кор}$  найдем, спроецировав вектор  $\vec{v}_{om}$  на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена противоположно вектору  $\vec{a}_{nep}^u$ ), и повернув затем эту проекцию в сторону  $\omega$ , т.е. по ходу вращения тела, на  $90^\circ$ . Изображаем вектор  $\vec{a}_{кор}$  на рисунке.

**Определение  $v_{a\bar{b}}$ .** Так как  $\vec{v}_{a\bar{b}} = \vec{v}_{от} + \vec{v}_{nep}$ , а векторы  $\vec{v}_{от}$  и  $\vec{v}_{nep}$  взаимно перпендикулярны, то в момент времени  $t = 1$ с

$$v_{a\bar{b}} = \sqrt{v_{отн}^2 + v_{nep}^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + (2,28)^2} = 2,4 \text{ м/с}.$$

**Определение  $a_{a\bar{b}}$ .** По теореме о сложении ускорений

$$\vec{a}_{a\bar{b}} = \vec{a}_{om}^{\tau} + \vec{a}_{om}^n + \vec{a}_{nep}^u + \vec{a}_{nep}^{ep} + \vec{a}_{кор}.$$

Для определения  $a_{a\bar{b}}$  проведем координатные оси  $Mxyz$  и вычислим проекции вектора  $\vec{a}_{a\bar{b}}$  на эти оси. Учтем при этом, что векторы  $\vec{a}_{кор}$ ,  $\vec{a}_{nep}^{ep}$  лежат на проведенной оси  $x$ , а векторы  $\vec{a}_{om}^{\tau}$ ,  $\vec{a}_{om}^n$ ,  $\vec{a}_{nep}^u$  расположены в плоскости  $Myz$ . Получим для момента времени  $t = 1$ с:

$$a_{a\bar{b}x} = a_{кор} + a_{nep}^{ep} = 5,42 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{a\bar{b}y} = -a_{om}^n \cos 60^\circ + a_{om}^{\tau} \cos 30^\circ = 0,74 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{a\bar{b}z} = -a_{om}^{\tau} \cos 60^\circ - a_{om}^n \cos 30^\circ + a_{nep}^u = 7,27 \text{ м/с}^2.$$

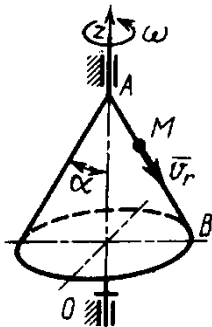
Отсюда находим значение  $a_{a\bar{b}}$  в момент времени  $t_1 = 1$ с:

$$a_{a\bar{6}} = \sqrt{a_{a\bar{6}x}^2 + a_{a\bar{6}y}^2 + a_{a\bar{6}z}^2} = 9,1 \text{ м/с}^2.$$

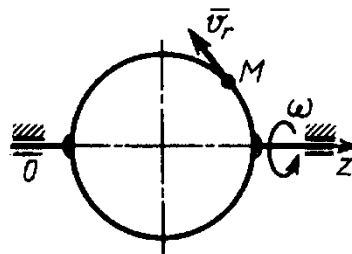
Ответ:  $v_{a\bar{6}} = 2,4 \text{ м/с}$ ;  
 $a_{a\bar{6}} = 9,1 \text{ м/с}^2$ .

### Вопросы и задания для самоконтроля

1. Какое движение точки называют относительным, переносным, абсолютным?
2. Напишите и объясните формулы, выражающие теоремы о сложении скоростей и ускорений точки.
3. Как определить модуль и направление кориолисова ускорения?
4. Конус вращается вокруг оси  $Oz$  с угловой скоростью  $\omega = 3 \text{ с}^{-1}$ . По его образующей с постоянной скоростью  $v_r = v_{om} = 4 \text{ м/с}$  движется точка  $M$  в направлении от  $A$  к  $B$ . Определите модуль абсолютной скорости этой точки в положении, когда расстояние  $AM = 2 \text{ м}$ , если угол  $\alpha = 30^\circ$  (Ответ:  $v_{a\bar{6}} = 5 \text{ м/с}$ ).
5. Диск вращается вокруг оси  $Oz$ . По его ободу движется точка  $M$  с постоянной относительной скоростью  $v_r = v_{om} = 9 \text{ м/с}$ . Определите переносную скорость точки  $M$  в момент, когда ее абсолютная скорость равна  $15 \text{ м/с}$  (Ответ:  $v_{nep} = 12 \text{ м/с}$ ).



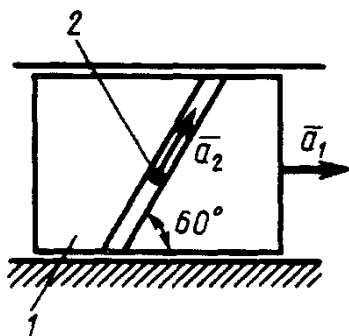
К заданию 4.



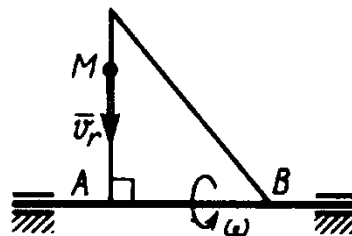
К заданию 5.

6. Ползун 1 движется по горизонтальным направляющим с постоянным ускорением  $a_1 = 4 \text{ м/с}^2$ . Точка 2 перемещается по отношению к ползуну с ускорением  $a_2 = 3 \text{ м/с}^2$ . Определите абсолютное ускорение точки (Ответ:  $a_{a\bar{6}} = 6,08 \text{ м/с}^2$ ).

7. По стороне треугольника, вращающегося вокруг стороны  $AB$  с угловой скоростью  $\omega = 8 \text{ с}^{-1}$ , движется точка  $M$  с относительной скоростью  $v_r = v_{om} = 4 \text{ м/с}$ . Определите модуль ускорения Кориолиса точки  $M$  (Ответ:  $a_{кор} = 64 \text{ м/с}^2$ ).



К заданию 6.

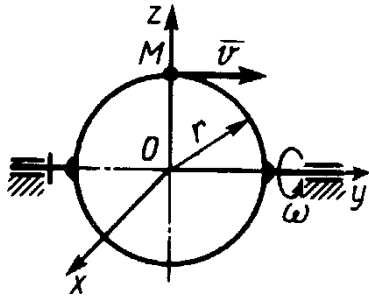


К заданию 7.

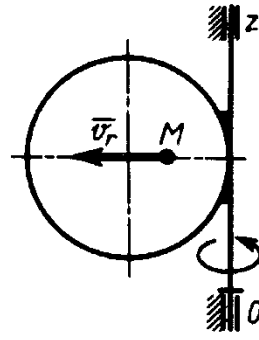
8. Точка  $M$  движется с постоянной скоростью  $v = 2 \text{ м/с}$  по кольцу радиуса  $r = 0,5 \text{ м}$ , который вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = 4 \text{ с}^{-1}$ . Определите модуль абсолютного ускорения точки  $M$  в указанном положении (Ответ:  $a_{a\bar{6}} = 16 \text{ м/с}^2$ ).

9. По диаметру диска, вращающегося вокруг оси  $Oz$ , движется точка  $M$  с относительной скоростью  $v_r = v_{om} = 4t^3 \text{ м/с}$ . Определите модуль относительного ускорения точки  $M$  в момент времени  $t = 1 \text{ с}$  (Ответ:  $a_{om} = 64 \text{ м/с}^2$ ).





К заданию 8.



К заданию 9.