Негосударственное частное образовательное учреждение высшего образования
«Технический университет УГМК»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Направление подготовки **13.03.02 Электроэнергетика и электротехника**

Профиль подготовки **Электрооборудование и энергохозяйство горных и промышленных предприятий**

Уровень высшего образования **Бакалавриат**
(бакалавриат, специалитет, магистратура)

Автор-разработчик: Сакулин В.А., канд. пед. наук, доцент
Рассмотрено на заседании кафедры гуманитарных и естественно-научных дисциплин
Одобрено Методическим советом университета 30 июня 2021 г., протокол № 4

г. Верхняя Пышма
2021

Методические указания к выполнению к контрольной работы составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины Высшая математика.

Перечень примерных контрольных работ по темам дисциплины.

1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.

Задание 1. На языке окрестностей ε − δ сформулировать определения предела функции в точке и одностороннего предела, соответствующие символическим равенствам, и дать геометрическую интерпретацию.

$\lim\limits_{x\to 10} f(x)=1$	$\lim\limits_{x\to +\infty} 3^x=+\infty$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=4$	$\lim\limits_{x\to -5-0} \frac{1}{x+5}=-\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to -3-0} \frac{1}{x+3}=-\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-3$	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x=-\infty$

Задание 2. Доказать (найти δ(x)), что:

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{3x^2-2x-1}{x+1/3}=-4$	$-1/3$
$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{x^2-4x+3}{x-3}=2$	3
$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{6x^2-5x+1}{x-1/3}=-1$	1/3
$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{2x^2+13x+21}{2x+7}=-\frac{1}{2}$	$-7/2$

Задание 3. Выяснить, являются ли 2 вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$

1) коллинеарными,

2) перпендикулярными,

если $\vec{a}$ = (2,0,3), $\vec{b}$ = (0,-2,0).

Задание 4. Решите систему уравнений (любым способом):

$$\begin{cases} 2x_1-8x_2+4x_3=1 \\ 4x_2-2x_3=2 \\ 6x_1-2x_2=1 \end{cases}$$

Задание 4. Вычислить определитель.

1. **2.** **3.**

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & 4 & -4 \end{vmatrix}$$

Задание 5. Найти обратную матрицу.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Введение в математический анализ. Предел и непрерывность функции

Найти:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 - 12x^6 + 3x - 11}{x^5 + 2x - 6x^7}$;
2. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{4 - \sqrt{21 - x}}{\sqrt[3]{x - 13} + 2}$;
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{1 + 2x + x^2} - \sqrt{x^2 - 4x + 1}\right)$;
4. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{tg\pi x}{x + 2}$;
5. $\lim\limits_{x\to 1} (\sin \pi x + x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$.

3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

I. Вычислить первую производную функций:

1. $y = \sqrt[3]{\operatorname{arcctg}\left(x^5\right)}$;
2. $y = \ln\left(\ln n + \sqrt{nx}\right), \quad n > 0; \left(\ln n + \sqrt{nx}\right) > 0;$
3. $y = \dfrac{x^2}{\cos^3 2x}$;
4. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3; \end{cases}$
5. $\sqrt{x}y - y^2 + 7xy - 12x^2y^2 = 0.$

II. Найти предел, используя правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$.

4. Исследование функций

Задание 1. Доказать, что функция f (x) непрерывна в точке x0 (найти δ(ε)).

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$f(x) = 5x^2 - 1, x_0 = 6$	2	$f(x) = 4x^2 - 2, x_0 = 5$
3	$f(x) = 3x^2 - 3, x_0 = 4$	4	$f(x) = 2x^2 - 4, x_0 = 3$

Задание 2. Исследовать функции f (x), y(x), f2(x) на непрерывность, установить типы точек разрыва и сделать графики функций в окрестности точек разрыва.

$f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-3x-10}$	$y=\dfrac{\sqrt[4]{x^2+2x}}{x^2-2x-8}$	$f_2(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2-1}$
$f(x)=\dfrac{5-x}{x^2-3x-10}$	$y=\dfrac{x}{2^{\frac{x}{1-x}}-1}$	$f_2(x)=\dfrac{x^2-x^3}{\lvert x-1\rvert}$
$f(x)=\dfrac{3x^2-12}{x-2}$	$y=\dfrac{\lvert x\rvert}{\operatorname{arctg}x}$	$f_2(x)=2^{\frac{x}{x^2-1}}$

Задание 3. Исследовать функции на непрерывность, установить тип точек разрыва и схематически построить графики функций.

$y=\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}-x^2$	$y=5^{\frac{1}{3x^2-12}}$
$y=\dfrac{x^3+2x^2+3x}{x}$	$y=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}-1}};$
$y=\dfrac{x^3-2x^2+3x}{x}$	$y=2^{\operatorname{tg}x}$

Задание 4. Исследовать функцию на непрерывность.

$f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x<2,\\ 2x, & x\ge 2.\end{cases}$
$f(x)=\begin{cases} -x, & x<0,\\ x^2+1, & 0\le x<2,\\ x+1, & x\ge 2.\end{cases}$
$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0,\\ \sin x, & 0\le x<\pi,\\ 3, & x\ge \pi.\end{cases}$
$f(x)=\begin{cases} 1, & x\le 0,\\ 2^x, & 0<x\le 2,\\ x+3, & x>2.\end{cases}$

Задание 5. Исследовать функции f1(x) и y(x)на непрерывность, установить тип точек разрыва и сделать графики функций в окрестности точек разрыва.

Задание	
$f_1(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x^3, & 0<x\le 2,\\ \dfrac{1}{2-x}, & x>2\end{cases}$	$y=\begin{cases}\sqrt{-x-3}, & x\le -3,\\ \dfrac{x}{1-x}, & -3<x\le 2,\\ -2, & x>2\end{cases}$

$f_1(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{x^2}, & 0<x<\dfrac{1}{2},\\ 4, & x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$	$y=\begin{cases}-\sqrt{4-x}, & x\le 0,\\ \log_{\frac{1}{2}} x, & 0<x\le 8,\\ \dfrac{x}{8}-4, & x>8\end{cases}$

5. Неопределённый интеграл

Найти интегралы:

1. $\int \dfrac{-5\,\mathrm{arctg}^2 x}{x^2+1}dx.$
2. $\int x\cdot 3^{-2x}\ dx.$
3. $\int \dfrac{7x^2-1}{x^3-5x^2+6x}dx.$
4. $\int \dfrac{4dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}.$
5. $\int \dfrac{dx}{-5\sin^2 x+3\cos^2 x-4}.$

6. Определённый интеграл

Задание 1. Не вычисляя интегралов, сравнить их (указать больший).

Вар.	Задание.	Вар.	Задание.
1.	$\int_0^1 e^x dx$ и $\int_0^1 x dx$	2.	$\int_1^2 (x^2+1)dx$ и $\int_1^2 x dx$
3.	$\int_1^2 e^x dx$ и $\int_1^2 (x-1)dx$	4.	$\int_0^1 (x+1)dx$ и $\int_0^1 0{,}5x dx$

Задание 2. Оценить интеграл сверху и снизу.

$\int_0^1 \mathrm{arctg}x\,dx$
$\int_1^3 (x^3 + x - 2)dx$
$\int_1^3 e^{3x}dx$
$\int_0^1 e^{x+3}dx$
$\int_{-1}^1 (5x^2 + 1)dx$
$\int_0^1 5^x dx$
$\int_{-1}^1 (4x^2 - 1)dx$

Задание 3. Найти среднее интегральное значение функции на указанном интервале.

$y = e^{3x}; [0,2]$
$y = \sin x; [0,\pi]$
$y = \sin\frac{x}{2}; \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = 2x^2 - x - 1; [0,2]$

Задание 4. Найти производную указанного определенного интеграла с переменным верхним пределом по этому пределу (результат обосновать).

$$\mathbf{I(x)=\int_0^x (t+1)^2 (t-3)^3\,dt}$$
$$\mathbf{I(x)=\int_0^x t\sin^3 t\,dt}$$
$$\mathbf{I(x)=\int_0^x (t^2+2)(t\sqrt{3}+3)^{-1}\,dt}$$
$$\mathbf{I(x)=\int_0^x t\sin t\,dt}$$

Задание 5. Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$	2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{6-4x-2x^2}}$	3. $\int_0^1 x10^x\,dx$

4. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+1}$	5. $\int_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x^2}}$	6. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+5\cos x}$	7. $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx$

7. Дифференциальные уравнения

1. Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

$$2x\sqrt{1-y^2}\,dx + ydy = 0.$$

$$xy' - y^2 = 0, \quad y(1)=1.$$

2. Решить однородные дифференциальные уравнения:

$$\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{y-x}$$

$$xy' = 4\sqrt{2x^2+y^2} + y$$

3. Решить линейные дифференциальные уравнения и уравнение Бернулли:

$$y' - y\sin x = \sin x\cos x.$$

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3};\, y(1)=1.$$

4. Решить дифференциальные уравнения второго порядка, допускающих понижение порядка:

$$2xy'y'' = (y')^2 + 1$$

$$2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2,\, y(0) = y'(0) = 1$$

5. Решить линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами методом неопределенных коэффициентов:

$$y'' + 9y = \sin 3x + 2e^{x}.$$

$$y'' - 4y' + 5y = (16 - 2x)e^{-x} + x^{2}$$

6. Решить линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{1 + e^{-2x}};\ y(0) = y'(0) = 0$$

7. Решить задачи:

- Определить путь S, пройденный телом за время t, если его скорость пропорциональна проходимому пути и если тело проходит 100 м за 10 с и 200 м за 15 с.
- Найти кривую, у которой подкасательная вдвое больше абсциссы точки касания.

8. Решить системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x + y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 2y - 3x \\ y' = y - 2x \end{cases}$$

8. Функции нескольких переменных

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных (дать геометрическое истолкование)

Вариант	$z = z(x; y)z$
1	$z = \sqrt{\ln(x + y)}$
2	$z = \ln \frac{x^2}{x + y}$
3	$z = \ln \frac{\cos x}{y}$
4	$z = \ln \frac{x - 3}{y - 5}$
5	$z = \ln(y - \sin x)$

Задание 2. Найти частные производные от функции z = z(x, y)

Вариант 1	Вариант 2
1. $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 2. $z=(\sin xy)^2+\arcsin\sqrt{1-xy}$	1. $z=\ln\left(\sqrt{x}+y^2\right)$ 2. $z=\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)^3+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{y}-1}$

Задание 3. Дана функция z = f (x, y). Проверить, удовлетворяет ли она данному уравнению

Вариант	$z=f(x,y)$	Уравнение
1	$z=e^{\frac{x}{y}}$	$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial x}\right)-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$
2	$z=e^{xy}$	$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

Задание 4. Вычислить производные сложных функций

Вариант	$z=f(x;y)$	Переменные	Найти:
1	$z=x\sin y+y\cos x$	$x=\frac{u}{v},\quad y=u^3v^2$	$\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}=?$
2	$z=e^{4xy}$	$x=\cos(1-t),\quad y=\sin t^2$	$\frac{dz}{dt}=?$
3	$z=x^2-y^2+2xy$	$x=\sin t,\ y=\arccos\left(e^t\right)$	$\frac{dz}{dt}=?$

9. Ряды

I. Применяя различные признаки сходимости, исследовать сходимость знакоположительных рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{5^n+3^n}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!3^n}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+4}\right)^{n^3+1}$.

II. Найти область сходимости степенного ряда:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$;   2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{x+3}{3}\right)^n$.

10. Функции комплексной переменной

1) Найти $\ln(-\sqrt{3}+i)$.

2) Найти действительную часть функции $f(z)=\bar{z}-2zi$.

3) Проверить условия Коши-Римана для функции $w = 5i\bar{z}^2 - 3z + 2$.

4) Найти $\oint\limits_{\gamma} \frac{(2z+3)dz}{z^2(z-i)}$, где $\gamma : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

11. Операционное исчисление

1. Найти изображение единичного импульса f(t), действующего только на промежутке времени μ:
   f(t) = 0 , если t<0; f(t) = 1 , если 0 ≤ t ≤ μ ; f(t) = 0 , если t > μ.
2. Найти изображение функции f(t) =0, при t < 0, f(t) = 2t, при 0 ≤ t ≤ 1, f(t) = 2, при t >1.
3. Найти оригинал f(t) для изображения
   $$F(p) = \frac{3p+1}{p^2+4p+8}$$
4. Найти f(t) , если $F(p) = \frac{4}{(p^2+4)(p-2)}$

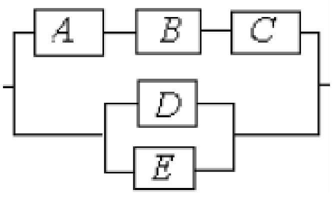
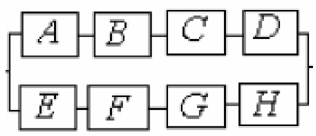
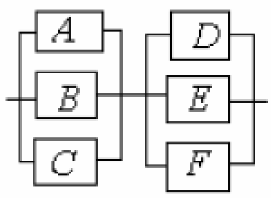
12. Элементы теории вероятностей и математической статистики

Задание 1. Алгебра событий

1. События: A - хотя бы один из трех проверяемых приборов бракованный. B – все приборы доброкачественные. Что означают события: A + B,A· B, ¬A, ¬B?
2. По цели производится 3 выстрела. Даны события Ai - попадание в цель при i –ом выстреле (i=1,2,3) . Выразить через Ai и ¬Ai слебдующие события: B0 - ни одного попадание в цель; B2 - хотя бы два попадания в цель.
3. Машинно-котельная установка состоит из трех котлов и одной машин. Событие A - исправна машина, событие B1- исправен первый котел ;B2 - исправен второй котел; B3-исправен третий котел. Событие C означает работоспособность машинно-котельной установки, которая может действовать при работе машины и хотя бы одного котла. Выразить событие C и ¬C через A, B1, B2, B3.

Задание 2. Работоспособность цепей

Для изображенной электрической цепи, состоящей из блоков A,B,C,D,E,F,G,H вводят событие S − схема работает. Записать выражения для S и ¬S .

1		2		3	

Задание 3. Элементы комбинаторики

1. Во многих странах водительское удостоверение (автомобильные права) имеет шифр, состоящий из 3 букв и 3 цифр. Чему равно общее число возможных номеров водительских удостоверений, считая, что число букв русского алфавита, используемых для составления шифра, — 26, а буквы занимают первые 3 позиции шифра?
2. Руководство фирмы выделило отделу рекламы средства для помещения в печати объявлений о предлагаемых фирмой товарах и услугах. По расчетам отдела рекламы выделенных средств хватит для того, чтобы поместить

объявления только в 15 из 25 городских газет. Сколько существует способов случайного отбора газет для помещения объявлений?

3. В урне имеются 15 шаров. Из них: 6 шаров белого цвета и 9 шаров чёрного цвета. Извлекаются наудачу три шара а) с возвращением; б) без возвращения. Сколько всего наборов для каждого способа извлечения можно сделать. Сколько в каждом случае можно сделать наборов, в которых все шары будут: 1) белого цвета; 2) чёрного цвета; 3) одного цвета. 4) Сколько наборов можно сделать, в которых будут шары разных цветов?
4. Фирмы F1, F2, F3, F4, F5 предлагают свои условия по выполнению 3 различных контрактов С1, С2 и С3. Любая фирма может получить только один контракт. Контракты различны, т. е. если фирма F1 получит контракт С1, то это не то же самое, если она получит контракт С2. Сколько способов получения контрактов имеют фирмы?

Задание 4. Геометрическая вероятность

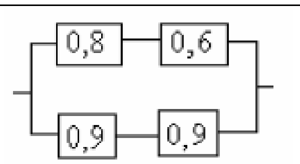
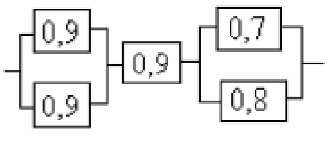
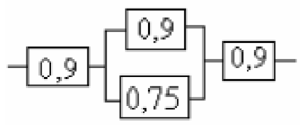
1. Из квадрата случайным образом выбирается точка. Какова вероятность того, что она удалена от вершин квадрата на расстояние не меньшее половины длины стороны квадрата?
2. Время прихода обоих пароходов к причалу независимо и равновозможно в течение суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ждать, если время стоянки обоих пароходов 1 час.

Задание 5. Теоремы теории вероятности

1. Система состоит из двух приборов, дублирующих друг друга. При выходе из строя одного из приборов происходит мгновенное переключение на второй. Надежность (вероятность безотказной работы прибора) каждого прибора равны 0,7 и 0,8 соответственно). Определить надежность системы.
2. Два стрелка по очереди стреляют в мишень, причем у каждого из них по два выстрела. Попавший первым получает приз. Найти вероятность получения приза для каждого игрока, если вероятность попадания при одном выстреле для первого равна 0.3, а для второго – 0.4.

Задание 6. Надежность цепей

Надежности (вероятности безотказной работы) узлов проставлены на рисунках. Найти надежность всей системы.

1		2		3	

Задание 7. Повторение событий

1. Транспортные средства оптовой базы обеспечивают за день выполнение не более трех заявок. База обслуживает 7 магазинов. Вероятность заявки от каждого из них в течение дня равна 0,3. Найти вероятность того, что все поступившие на базу в течение дня заявки будут выполнены.
2. Производиться испытание пяти приборов, каждый из которых выходит из строя с вероятностью 0,1. Найти вероятность того, что хотя бы два прибора выйдут из строя при испытании