



Негосударственное частное образовательное учреждение
высшего образования
«Технический университет УГМК»

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ
ПО МОДУЛЮ
МОДУЛЬ 1. БАЗОВЫЙ

Направление подготовки	<i>13.04.02 Электроэнергетика и электротехника</i>
Направленность (профиль)	<i>Управление и устойчивое развитие электрохозяйства предприятия</i>
Уровень высшего образования	<i>магистратура</i> <i>(бакалавриат, специалитет, магистратура)</i>
Квалификация выпускника	<i>магистр</i>

Авторы - разработчики: Городницкая О.И., канд. техн. наук. Шестакова И.А., канд. пед. наук
Папуловская Н.В., канд. техн. наук. Жаткин А.Н.
Рассмотрено на заседании кафедры Энергетики
Одобрено Методическим советом университета 30 июня 2021 г., протокол № 4

г. Верхняя Пышма
2021

Методические рекомендации для студентов по организации и выполнению самостоятельной работы по модулю 1 "Базовый".

Самостоятельная работа является неотъемлемой составляющей образовательного процесса. Самостоятельная работа магистрантов включает изучение теоретического курса и подготовку к практическим и лабораторным занятиям, выполнение домашнего задания, подготовка к зачетам, экзаменам. Настоящие Методические рекомендации для студентов по организации и выполнению самостоятельной работы по модулю 1 "Базовый" относятся к виду учебной работы «Изучение теоретического курса и подготовка к экзамену». Самостоятельная работа магистрантов также включает все виды текущей аттестации.

Тематика самостоятельной работы

№	Наименование работы
1	Подготовка к практическому занятию: Знакомство, вводная презентация + Noun and its plural – существительное и множественное число. Личные качества и компетенции инженера (Traits and competencies of an engineer) + Артикли a/an и the. Инженерное образование (An engineer's education) + Nouns: countables/uncountables, some/any, little/few, much/many, a lot of. Презентация информации (Presenting information) + Present Simple – настоящее простое время
2	Подготовка к практическому занятию: Таблицы и графики (Tables and graphs) + There + be/it's. Система измерения и чертежи (System of units, dimensions and drawings) + Making comparison – сравнение. Числа (Working with numbers) + Present Continuous – настоящее продолженное время. Материалы и Свойства (Material and properties) + Сопоставление Present Simple и Present Continuous. Инструменты (Tools) + Глаголы, не имеющие форм группы Continuous.
3	Выполнение домашних работ по теме: Английский язык для специалистов и руководителей энергослужб предприятий
4	Подготовка к практическому занятию: Техника безопасности (Safety Precautions) + Past Simple – прошедшее простое время. Рынок, работа с заказчиками и производителями, оформление заказа (Markets, customers and producers, making an order) + Past Continuous. Собеседование (Interview) + Сопоставление Past Continuous и Past Simple. Деловая переписка (Business correspondence) + Present Perfect – настоящее совершенное время.
5	Подготовка к практическому занятию: Деловая поездка (Business trip) + Сопоставление Past Simple и Present Perfect. Деловые переговоры (Business meeting) + Future Simple – будущее простое время. Составление отчетов, решение проблем (Reporting and problem solving) + Be Going To. Вопросы защиты окружающей среды (Protecting the environment) + Modal verbs – модальные глаголы. Будущее энергетики (The future of energy) + The Passive – страдательный залог
6	Подготовка к зачету по теме: Английский язык для специалистов и руководителей энергослужб предприятий
7	Подготовка к практическим занятиям: Разностные уравнения. Элементы теории случайных функций и корреляционного анализа
8	Подготовка к практическим занятиям: Элементы теории нечетких множеств. Элементы теории оптимизации
9	Подготовка к экзамену по теме: Специальные главы математики
10	Подготовка к практическим занятиям: Информационные технологии, изменившие мир. Управляющие механизмы. Умные города и производства.

11	Подготовка к практическим занятиям: Информационные и управляющие технологии. Примеры распределенных информационно-управляющих систем.
12	Подготовка к экзамену по теме: Компьютерные, сетевые и информационные технологии
13	Подготовка к практическим занятиям: Наука и ее роль в развитии общества. Организация научно-исследовательской работы. Научное исследование и его этапы
14	Подготовка к практическим занятиям: Метод системного анализа объектов и предметов исследования и методики его применения. Методика работы над рукописью исследования, особенности подготовки и оформления
15	Подготовка к зачету по теме: Теория и практика инженерного исследования

Самостоятельная работа № 1,2,4,5

Тема: Подготовка к практическому занятию: Знакомство, вводная презентация + Noun and its plural – существительное и множественное число. Личные качества и компетенции инженера (Traits and competencies of an engineer) + Артикли a/an и the. Инженерное образование (An engineer's education) + Nouns: countables/uncountables, some/any, little/few, much/many, a lot of. Презентация информации (Presenting information) + Present Simple – настоящее простое время;

Подготовка к практическому занятию: Таблицы и графики (Tables and graphs) + There + be/it's. Система измерения и чертежи (System of units, dimensions and drawings) + Making comparison – сравнение. Числа (Working with numbers) + Present Continuous – настоящее продолженное время. Материалы и Свойства (Material and properties) + Сопоставление Present Simple и Present Continuous. Инструменты (Tools) + Глаголы, не имеющие форм группы Continuous.;

Подготовка к практическому занятию: Техника безопасности (Safety Precautions) + Past Simple – прошедшее простое время. Рынок, работа с заказчиками и производителями, оформление заказа (Markets, customers and producers, making an order) + Past Continuous. Собеседование (Interview) + Сопоставление Past Continuous и Past Simple. Деловая переписка (Business correspondence) + Present Perfect – настоящее совершенное время.;

Подготовка к практическому занятию: Деловая поездка (Business trip) + Сопоставление Past Simple и Present Perfect. Деловые переговоры (Business meeting) + Future Simple – будущее простое время. Составление отчетов, решение проблем (Reporting and problem solving) + Be Going To. Вопросы защиты окружающей среды (Protecting the environment) + Modal verbs – модальные глаголы. Будущее энергетики (The future of energy) + The Passive – страдательный залог

Практическое задание. выполнение упражнений на закрепление грамматического материала

Примечание: Примерные упражнения для самостоятельных работ с 1-18 представлены в сборнике «Методические указания по грамматике английского языка» (Приложение 1)

Самостоятельная работа № 3

Тема: Выполнение домашних работ по теме: Английский язык для специалистов и руководителей энергослужб предприятий

Темы домашних работ:

1. Подготовить краткую презентацию о себе и своей компании на английском языке, выучить новые слова по теме First Business Card, Business Card, прочитать и перевести статью Working in a foreign country

2. Подготовить на английском языке сообщение о качествах идеального инженера, выучить новые слова по теме: What is a perfect engineer? и цитаты. Прочитать и перевести статью Top 10 qualities of a great engineer.
3. Подготовить на английском языке сообщение о командной работе, прочитать и перевести статью Teams with bright ideas, выучить новые слова по теме Teamwork.
4. Проработать пример составления резюме, подготовить на английском языке сообщение по теме «Проведение собеседования с кандидатом на вакансию специалиста энергослужбы, принятие решения и объяснение своего выбора». Выучить новые слова и выражения.
5. Подготовить на английском языке сообщение по теме «Presenting information», выучить новые слова.
6. На примере выступлений бизнес-кейса круглый стол по Устойчивой энергетике Форума по изменению климата в Париже, декабрь 2015 г. подготовить вопросы на английском языке к выступающим.
7. Подготовить на английском языке описание графика, тренда или диаграммы, выучить новые слова по теме “Tables and graphs. Discussing readings and trends”, прочитать и перевести статью “Production Progress Report”.
8. Подготовить на английском языке сообщение о геометрических формах и размерах определенного объекта или компонента оборудования, выучить новые слова по теме “Describing shapes and qualities” на примере различных стандартных конфигураций вилок и розеток в разных странах. Научиться задавать вопросы и отвечать о размерах и формах предметов, объектов и оборудования. Прочитать и перевести статью “The Roman Coliseum”.
9. Подготовить на английском языке сообщение о размещении оборудования на общем плане цеха, о габаритных размерах, высоте отметок, поперечных размерах, используемых единицах измерения, выучить новые слова по теме “System of units, dimensions and drawings”.
10. Научиться правильно использовать числа в речи и на письме, выучить валюты различных стран, выучить новые слова и выражения по теме “Business costs”, прочитать и перевести статью «The business of giving».
11. Подготовить на английском языке сообщение о принятии решения о выборе материалов оборудования и инженерных коммуникаций. Выучить слова по теме “Materials and properties”, прочитать и перевести статью “Construction Basics: Understanding Your Materials”.
12. Подготовить на английском языке сообщение об учете энергоресурсов значимыми энергоносителями. Выучить новые слова по теме «Instruments and Tools».
13. Выучить пиктограммы и их названия, предупреждающие фразы по теме “Safety Precautions”.
14. Составить письмо-заказ на оборудование. Выучить слова по теме «Markets, customers and producers, making an order». Прочитать и перевести статью «Unusual markets. Playtime.»
15. Написать письмо иностранному партнеру в соответствии с конкретным для каждого студента бизнес-кейсом. Выучить слова и выражения по теме “Business correspondence”.
16. Составить три диалога на английском языке по темам: «Airport», «Hotel», «Cafe». Выучить новые слова и выражения по теме «Business trip».
17. Подготовить на английском языке отчет к приезду иностранной делегации в соответствии с конкретным для каждого студента бизнес-кейсом. Выучить новые слова и выражения по теме “Business meeting”. Прочитать и перевести статью “Project analysis”.
18. Подготовить на английском языке краткий отчет о проведении энергоаудита, выучить слова и выражения по теме “Reporting and problem solving”. Прочитать и перевести статью “Lighting up the world”.
19. Подготовить на английском языке краткое сообщение о том, какой вклад каждый из нас может внести в вопрос защиты окружающей среды. Выучить новые слова и выражения по теме “Protecting the environment”. Прочитать и перевести статью “The Kyoto Protocol”.
20. Бизнес-кейс по теме “The future of energy”.

Самостоятельная работа № 6

Тема: Подготовка к зачету по теме: Английский язык для специалистов и руководителей энергослужб предприятий

Цель:

- отработка навыка решения практических задач.
- подготовка к выполнению зачетного задания.

Изучение литературных и электронных источников:

- Английский язык для специалистов и руководителей энергослужб предприятий.

Практическое задание. Выполнение заданий по теме 1 "Английский язык для специалистов и руководителей энергослужб предприятий "

Самостоятельная работа № 7

Тема: Подготовка к практическим занятиям: Разностные уравнения. Элементы теории случайных функций и корреляционного анализа

Цель:

- отработка навыка решения практических задач.

Линейные разностные уравнения возникают при моделировании процессов с дискретным временем, при численном интегрировании дифференциальных уравнений, при нахождении приближенных значений корней уравнения, при аппроксимации функции и т.п.

Теория линейных разностных уравнений является точным аналогом теории линейных дифференциальных уравнений.

Основные понятия

Пусть функция $y = f(x)$ определена для всех значений x вида $x_s = a + s \cdot h$, где a, h – фиксированные вещественные числа, $h \neq 0$ – шаг, $s = 0, 1, 2, \dots$

Выражение вида

$$\Delta_h f(x_s) = f(a + (s + 1)h) - f(a + s \cdot h) \equiv f(x_s + h) - f(x_s)$$

называется *конечной разностью первого порядка* функции $f(x)$ в точке x_s .

Конечные разности любого натурального порядка определяются по индукции:

$$\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x),$$

$$\Delta_h^2 f(x) = \Delta_h f(x + h) - \Delta_h f(x) \equiv \Delta_h(\Delta_h f(x)),$$

...

$$\Delta_h^k f(x) = \Delta_h^{k-1} f(x + h) - \Delta_h^{k-1} f(x) \equiv \Delta_h(\Delta_h^{k-1} f(x)),$$

...

Введем обозначение $u(s) = f(x_s)$, тогда

$$\Delta_h f(x_s) = f(a + (s + 1)h) - f(a + s \cdot h) = u(s + 1) - u(s) = \Delta_1 u(s), \dots,$$

$$\Delta_h^k f(x_s) = \Delta_1^k u(s), \dots \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Справедливо следующее равенство

$$\Delta^p u(s) = \sum_{m=0}^p (-1)^{p-m} C_p^m \cdot u(s + m), \quad C_p^m = \frac{p!}{m! (p - m)!}, \quad (1)$$

в частности

$$\begin{aligned}\Delta u(s) &= u(s+1) - u(s), \\ \Delta^2 u(s) &= u(s+2) - 2u(s+1) + u(s), \\ \Delta^3 u(s) &= u(s+3) - 3u(s+2) + 3u(s+1) - u(s).\end{aligned}\tag{2}$$

Разностным уравнением называется соотношение

$$F(s, u(s), \Delta u(s), \dots, \Delta^k u(s)) = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots\tag{3}$$

Решением уравнения (3) называется функция $u(s)$, при подстановке которой в уравнение (3), оно обращается в тождество при всех s .

Порядок уравнения (3) равен k , если после замены (1) уравнение (3) явно содержит как $u(s+k)$, так и $u(s)$.

Пример 1.

Определить порядок разностного уравнения

$$\Delta^3 u(s) - 3\Delta u(s) - Cu(s) = 0$$

в зависимости от значения числового параметра C .

Подставим в заданное уравнение

$$\begin{aligned}\Delta u(s) &= u(s+1) - u(s), \\ \Delta^3 u(s) &= u(s+3) - 3u(s+2) + 3u(s+1) - u(s).\end{aligned}$$

После упрощения получим

$$u(s+3) - 3u(s+2) + (2-C)u(s) = 0.$$

При $C \neq 2$ это уравнение в явном виде содержит $u(s+3)$, $u(s+2)$ и $u(s)$, т.к. $(s+3) - s = 3$, то порядок уравнения равен 3.

При $C = 2$ это уравнение в явном виде содержит $u(s+3)$ и $u(s+2)$, т.к. $(s+3) - (s+2) = 1$, то порядок уравнения равен 1.

Задача Коши. Пусть разностное уравнение (3) k -го порядка разрешимо относительно $u(s+k)$, т.е.

$$u(s+k) = G(s, u(s), u(s+1), \dots, u(s+k-1))\tag{4}$$

и заданы начальные условия

$$\begin{cases} u_0 = u(s_0), \\ u_1 = u(s_0 + 1), \\ \dots \\ u_{k-1} = u(s_0 + k - 1). \end{cases}\tag{5}$$

Задача Коши состоит в отыскании решения $u(s)$, $s = s_0, s_0 + 1, \dots$ уравнения (4), удовлетворяющего начальным условиям (5).

Решение задачи Коши методом *последовательных подстановок*:

Зададим начальные значения

$$u(s_0) = u_0, u(s_0 + 1) = u_1, \dots, u(s_0 + k - 1) = u_{k-1}.$$

Вычислим рекуррентно по формуле (4) остальные элементы последовательности (считаем $s_0 = 0$):

$$\begin{aligned} u(j) &= u_j, \quad j = \overline{0, k-1}, \\ u(k) &= G(0, u_0, u_1, \dots, u_{k-2}, u_{k-1}), \\ u(k+1) &= G(1, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u(k)) = \\ &= G(1, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, G(0, u_0, u_1, \dots, u_{k-2}, u_{k-1})) \dots \end{aligned}$$

Линейные уравнения первого порядка

Линейным разностным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида

$$\Delta u(s) + P(s)u(s) = Q(s) \Leftrightarrow u(s+1) = [1 - P(s)]u(s) + Q(s), P(s) \not\equiv 1.$$

Если $Q(s) \equiv 0$, то уравнение называется *однородным*, в противном случае – *неоднородным*.

Рассмотрим однородное уравнение

$$u(s+1) = [1 - P(s)]u(s).$$

Тогда

$$u(1) = [1 - P(0)]u(0),$$

$$u(2) = [1 - P(1)]u(1),$$

...

$$u(s) = [1 - P(s-1)]u(s-1).$$

Отсюда *общее решение линейного однородного уравнения* находят по формуле

$$u(s) = u(0) \cdot \prod_{t=0}^{s-1} [1 - P(t)], \quad s = 1, 2, 3, \dots,$$

где $u(0)$ – произвольная постоянная.

Общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид (аналог метода вариации произвольных постоянных из курса дифференциальных уравнений)

$$u(s) = \left(\prod_{t=0}^{s-1} H(t) \right) \cdot \left(\sum_{p=0}^{s-1} \frac{Q(p)}{\prod_{t=0}^p H(t)} + C \right), \quad s = 1, 2, 3, \dots, \quad (6)$$

$$H(t) = 1 - P(t),$$

где C – произвольная постоянная.

Пример 2.

Найти решение уравнения

$$u(s+1) = \left(\frac{s+2}{s+1} \right)^2 \cdot u(s) + \frac{2s+4}{s+3}.$$

Для того, чтобы воспользоваться формулой (6), вычислим предварительно

$$\prod_{t=0}^r H(t) = \prod_{t=0}^r \left(\frac{s+2}{s+1}\right)^2 = \left(\frac{2}{1}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \dots \left(\frac{r+1}{r}\right)^2 \left(\frac{r+2}{r+1}\right)^2 = (r+2)^2$$

и подставим в (6), получим

$$\begin{aligned} u(s) &= (s+1)^2 \left(\sum_{p=0}^{s-1} \frac{Q(p)}{(p+2)^2} + C \right) = (s+1)^2 \left(\sum_{p=0}^{s-1} \frac{2p+4}{(p+3)(p+2)^2} + C \right) = \\ &= (s+1)^2 \left(\sum_{p=0}^{s-1} \frac{2}{(p+3)(p+2)} + C \right) = (s+1)^2 \left(\sum_{p=0}^{s-1} \left(\frac{2}{p+2} - \frac{2}{p+3} \right) + C \right) = \\ &= (s+1)^2 \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} + C \right) = \\ &= (s+1)^2 \left(1 - \frac{2}{s+2} + C \right) = (s+1)^2 \left(\frac{s}{s+2} + C \right). \end{aligned}$$

Общее решение уравнения

$$u(s) = (s+1)^2 \left(\frac{s}{s+2} + C \right).$$

Свойства решений линейных разностных уравнений

Линейным разностным уравнением k -го порядка называется уравнение вида

$$\Delta^k u(s) + b_1(s) \Delta^{k-1} u(s) + \dots + b_{k-1}(s) \Delta u(s) + b_k(s) u(s) = Q(s), s = 0, 1, 2, \dots$$

Если после преобразования по формуле (1) оно принимает вид

$$u(s+k) + a_1(s)u(s+k-1) + \dots + a_k(s)u(s) = Q(s), a_k(s) \neq 0. \quad (7)$$

Если $Q(s) \equiv 0$, т.е.

$$u(s+k) + a_1(s)u(s+k-1) + \dots + a_k(s)u(s) = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

то уравнение называется *однородным*, в противном случае – *неоднородным*.

Заметим, что тождество между функциями индекса s понимается как *совпадение* при всех значениях s из заданного подмножества *целых чисел*.

Свойства решений однородного уравнения k -го порядка:

- если $u_1(s), u_2(s), \dots, u_m(s)$ – решения уравнения (8), то их линейная комбинация $C_1 u_1(s) + C_2 u_2(s) + \dots + C_m u_m(s)$ тоже является решением этого уравнения;
- если $u_1(s), u_2(s), \dots, u_m(s)$ – решения уравнения (7), причем

$$D[u_1, u_2, \dots, u_k] = \begin{vmatrix} u_1(0) & u_1(1) & \dots & u_1(k-1) \\ u_2(0) & u_2(1) & \dots & u_2(k-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_k(0) & u_k(1) & \dots & u_k(k-1) \end{vmatrix} \neq 0,$$

то общее решение уравнения (7) имеет вид

$$C_1 u_1(s) + C_2 u_2(s) + \dots + C_k u_k(s).$$

Фундаментальной системой решений (ФСР) уравнения (8) называется набор частных решений $u_1(s), u_2(s), \dots, u_k(s)$ этого уравнения, что $D[u_1, u_2, \dots, u_k] \neq 0$.

Общее решение неоднородного уравнения (7) представляется в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения (8) и какого-либо частного решения неоднородного уравнения (7).

Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Решение линейного однородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами

$$u(s+k) + a_1 u(s+k-1) + \dots + a_k u(s) = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots, a_k \neq 0 \quad (9)$$

будем искать в виде

$$u(s) = \lambda^s, \lambda = \text{const} \neq 0.$$

После подстановки в (9) получим характеристическое уравнение для поиска λ :

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0. \quad (10)$$

В ФСР уравнения (9) каждому вещественному корню λ кратности m соответствует m частных решений вида $\lambda^s, s\lambda^s, \dots, s^{m-1}\lambda^s$; каждой паре комплексно сопряженных корней $\lambda = \alpha(\cos\beta + i \sin\beta)$ и $\bar{\lambda} = \alpha(\cos\beta - i \sin\beta)$, где $\alpha \sin\beta \neq 0$, кратности m соответствует $2m$ частных решений вида

$$\begin{aligned} &\alpha^s \cos(\beta s), s\alpha^s \cos(\beta s), \dots, s^{m-1} \alpha^s \cos(\beta s), \\ &\alpha^s \sin(\beta s), s\alpha^s \sin(\beta s), \dots, s^{m-1} \alpha^s \sin(\beta s). \end{aligned}$$

Пример 3.

Решить задачу Коши: найти частное решение уравнения

$$u(s+4) + 2u(s+3) + 3u(s+2) + 2u(s+1) + u(s) = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u(0) = u(1) = u(3) = 0, \quad u(2) = -1.$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Найдем корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = \lambda_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

или в тригонометрической форме

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

Тогда общее решение уравнения имеет вид (корни комплексно сопряженные кратности 2):

$$u(s) = (C_1 + C_2 s) \cos \frac{2\pi s}{3} + (C_3 + C_4 s) \sin \frac{2\pi s}{3}.$$

Для определения значений постоянных воспользуемся начальными условиями:

$$u(0) = 0: C_1 \cos 0 + C_3 \sin 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0,$$

$$u(3) = 0: (C_1 + 3C_2) \cos 2\pi + (C_3 + 3C_4) \sin 2\pi = 0 \Rightarrow C_2 = 0,$$

$$u(1) = 0: (C_3 + C_4) \sin \frac{2\pi}{3} = 0,$$

$$u(2) = -1: (C_3 + 2C_4) \sin \frac{4\pi}{3} = -1.$$

Решая систему из двух последних уравнений, получаем

$$C_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \quad C_4 = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Подставив найденные значения постоянных в общее решение, получим частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям – решение задачи Коши:

$$u(s) = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}s\right) \sin \frac{2\pi s}{3}$$

или

$$u(s) = \frac{2(s-1)}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi s}{3}.$$

Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Решение линейного неоднородного разностного уравнения с постоянными действительными коэффициентами

$$u(s+k) + a_1 u(s+k-1) + \dots + a_k u(s) = Q(s), \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

где $Q(s) = |\lambda|^s (P(s) \cos(\beta s) + H(s) \sin(\beta s)) \neq 0$;

$P(s)$ и $H(s)$ – многочлены степени не выше n с действительными коэффициентами;

$|\lambda|, \beta$ – действительные числа,

можно найти по следующему алгоритму:

Шаг 1. Составляем однородное уравнение

$$u(s+k) + a_1 u(s+k-1) + \dots + a_k u(s) = 0.$$

Находим корни λ_j характеристического уравнения

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0.$$

Записываем общее решение однородного уравнения $u_{од}(s)$.

Шаг 2. Подбираем частное решение $u^*(s)$ исходного неоднородного уравнения в следующем виде:

$$u^*(s) = s^m \cdot |\lambda|^s \cdot (P^*(s) \cos(\beta s) + H^*(s) \sin(\beta s)),$$

где m – кратность корня характеристического уравнения $\lambda = |\lambda|(\cos\beta + i\sin\beta)$,

$P^*(s)$ и $H^*(s)$ – многочлены степени не выше n с неопределенными коэффициентами.

Коэффициенты многочленов $P^*(s)$ и $H^*(s)$ определяем подстановкой $u^*(s)$ в исходное уравнение.

Шаг 3. Записываем общее решение исходного неоднородного уравнения как сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$u(s) = u_{\text{од}}(s) + u^*(s).$$

Пример 4.

Найти решение уравнения $f(s + 2) - f(s + 1) - f(s) = s + 2^s$.

Шаг 1. Составим соответствующее однородное уравнение

$$f(s + 2) - f(s + 1) - f(s) = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Найдем корни λ_j характеристического уравнения

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Запишем общее решение однородного уравнения

$$f_{\text{од}}(s) = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^s + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^s.$$

Шаг 2. Неоднородность $Q(s) = s + 2^s$ представляет собой сумму двух квазимногочленов:

$$Q(s) = Q_1(s) + Q_2(s), \text{ где } Q_1(s) = s; \quad Q_2(s) = 2^s.$$

Подберем частные решения $f_1^*(s)$ и $f_2^*(s)$ в зависимости от вида неоднородности:

$$Q_1(s) = s \Rightarrow |\lambda| = 1; \quad P(s) = s; \quad \beta = 0; \quad \text{кратность корня } \lambda_j = 1 \text{ равна } 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow f_1^*(s) = A_0 + A_1 \cdot s;$$

$$Q_2(s) = 2^s \Rightarrow |\lambda| = 2; \quad P(s) = 1; \quad \beta = 0; \quad \text{кратность корня } \lambda_j = 2 \text{ равна } 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow f_2^*(s) = B \cdot 2^s.$$

Определим коэффициенты A_0, A_1, B .

Подставим $f_1^*(s)$ в неоднородное уравнение $f(s + 2) - f(s + 1) - f(s) = s$, получим

$$A_0 + A_1 \cdot (s + 2) - A_0 - A_1 \cdot (s + 1) - A_0 - A_1 \cdot s = s.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях s в левой правой частях уравнения, получим систему

$$\begin{cases} -A_0 + A_1 = 0, \\ -A_1 = 1. \end{cases}$$

Тогда $A_1 = -1, A_0 = -1; \quad f_1^*(s) = -1 - s$.

Подставим $f_2^*(s)$ в неоднородное уравнение $f(s + 2) - f(s + 1) - f(s) = 2^s$, получим

$$B \cdot 2^{s+2} - B \cdot 2^{s+1} - B \cdot 2^s = 2^s \text{ или } 4B \cdot 2^s - 2B \cdot 2^s - B \cdot 2^s = 2^s.$$

Приведем подобные, получим $B \cdot 2^s = 2^s \Rightarrow B = 1; \quad f_2^*(s) = 2^s$.

Частное решение исходного неоднородного уравнения равно сумме найденных частных решений $f_1^*(s)$ и $f_2^*(s)$:

$$f^*(s) = 2^s - s - 1.$$

Шаг 3. Запишем общее решение исходного неоднородного уравнения как сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$f(s) = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^s + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^s + 2^s - s - 1.$$

Основные понятия

Временной ряд (динамический ряд) – ряд последовательных значений наблюдаемого признака (случайной величины), характеризующих изменение этого признака во времени.

Это могут быть как характеристики технических систем, так и показатели природных, социальных, экономических и других систем.

Если будущие значения временного ряда точно определены какой-либо математической функцией, то временной ряд называют *детерминированным*. Если будущие значения могут быть описаны только с помощью распределения вероятностей, временной ряд называют *случайным*. Если время измеряется непрерывно, временной ряд называется *непрерывным*, если же время фиксируется дискретно, т.е. через некоторые (зачастую равные) промежутки времени, то временной ряд *дискретен*.

В дальнейшем будем рассматривать случайные дискретные временные ряды.

Дискретные временные ряды могут появляться двумя путями:

- 1) выборкой из непрерывных временных рядов через фиксированные промежутки времени;
- 2) накоплением переменной в течение некоторого периода времени (за такие периоды, как день, месяц, год, время цикла производства).

В случае дискретного временного ряда отдельные значения признака называются *уровнями* ряда и могут быть обозначены через y_t ($t = 1, 2, \dots, n$), где n – число уровней ряда.

В таблице 1 приведены данные, отражающие выход 50 последовательных партий некоторого продукта – временной ряд y_t .

На рисунке 1 этот временной ряд показан графически.

Таблица 1.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	56	79	74	42	71	74	98	87	61	74
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_t	62	113	103	82	104	91	116	91	132	121
t	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
y_t	113	95	117	99	126	153	148	138	158	135
t	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
y_t	151	142	178	165	171	152	171	159	144	163
t	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

y_t	158	190	182	208	192	219	189	204	181	225
-------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

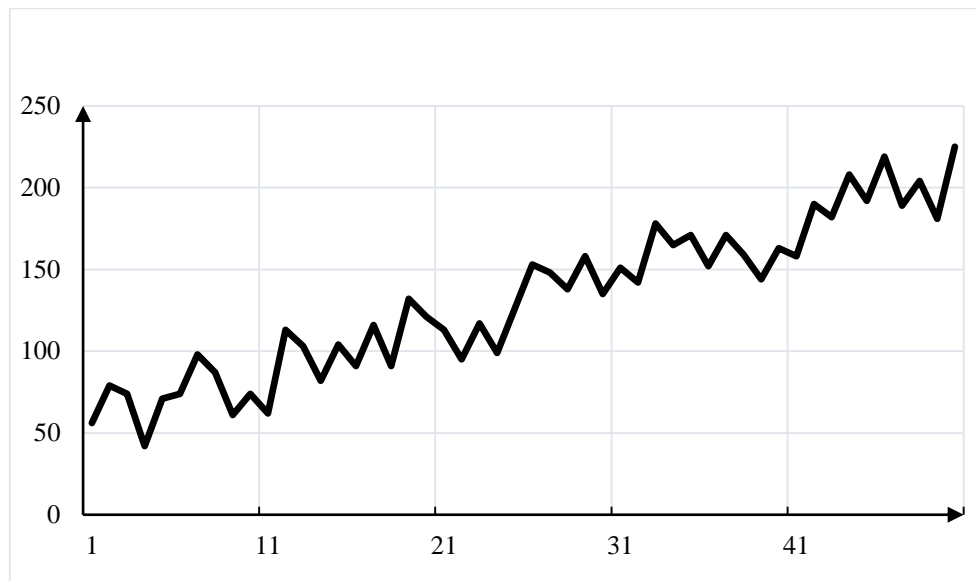


Рисунок 1

Под *анализом* временных рядов понимают совокупность математико-статистических методов анализа (в том числе методов *корреляционного* и *спектрального анализа*, моделей *авторегрессии* и *скользящей средней*), предназначенных для выявления структуры временных рядов, построения математической модели явления, служащего источником анализируемого временного ряда, и прогнозирования временных рядов с целью эффективного принятия решений в дальнейшем.

Выделяют несколько составляющих временного ряда:

- *тренд* – плавно меняющаяся компонента, описывающая влияние долговременных факторов на исследуемый процесс;
- *сезонная компонента* – компонента, отражающая повторяемость процесса в течение некоторого не очень длительного периода времени (год, квартал, месяц, неделя и т.п.);
- *циклическая компонента* – компонента, отражающая повторяемость процесса в течение длительного периода времени (циклы солнечной активности, демографические «ямы» и т.п.);
- *случайная компонента* – компонента, отражающая влияние случайных факторов (не поддающихся учету и регистрации).

Таким образом, в общем виде временной ряд имеет следующий вид:

$$y_t = u_t + v_t + c_t + \varepsilon_t \quad (t = 1, 2, \dots, n),$$

где u_t – тренд; v_t – сезонная компонента; c_t – циклическая компонента; ε_t – случайная компонента.

Автокорреляционная функция

Временной ряд, вероятностные свойства которого (числовые характеристики распределения) не меняются с течением времени, называется *стационарным* (*стационарным в широком смысле*). Если совместное распределение вероятностей n наблюдений y_1, y_2, \dots, y_n такое же

как и n наблюдений $y_{1+\tau}, y_{2+\tau}, \dots, y_{n+\tau}$ при любых n, t и τ (т.е. закон распределения и его числовые характеристики не зависят от времени), то ряд называется *строго стационарным (стационарным в узком смысле)*.

Математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D}$ строго стационарного временного ряда могут быть оценены выборочным средним \bar{y}_t и выборочной дисперсией s_t^2 по следующим формулам:

$$\bar{y}_t = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t, \quad s_t^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y}_t)^2.$$

Степень тесноты связи между последовательностями наблюдений временного ряда y_1, y_2, \dots, y_n и $y_{1+\tau}, y_{2+\tau}, \dots, y_{n+\tau}$ (с лагом τ) может быть определена с помощью *коэффициента автокорреляции*

$$\rho(\tau) = \frac{M[(y_t - a)(y_{t+\tau} - a)]}{\sigma^2}.$$

Статистической оценкой $\rho(\tau)$ является *выборочный коэффициент автокорреляции*

$$r(\tau) = \frac{(n - \tau) \cdot \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t y_{t+\tau} - \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t \cdot \sum_{t=1}^{n-\tau} y_{t+\tau}}{\sqrt{(n - \tau) \cdot \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t^2 - (\sum_{t=1}^{n-\tau} y_t)^2} \cdot \sqrt{(n - \tau) \cdot \sum_{t=1}^{n-\tau} y_{t+\tau}^2 - (\sum_{t=1}^{n-\tau} y_{t+\tau})^2}}.$$

График *выборочной автокорреляционной функции* $r = r(\tau)$ называется *коррелограммой*.

При выборе лага τ ориентируются на соотношение $\tau \leq n/4$.

Также при исследовании временных рядов рассматривается частный коэффициент автокорреляции $\rho_{\text{част}}(\tau)$ между членами временного ряда y_t и $y_{t+\tau}$.

Статистической оценкой $\rho_{\text{част}}(\tau)$ является *выборочный частный коэффициент автокорреляции*

$$r_{\text{част}}(\tau) = r_{ij,k} = \frac{r_{ij} - r_{ik}r_{jk}}{\sqrt{(1 - r_{ik}^2)(1 - r_{jk}^2)}}.$$

Например, выборочный частный коэффициент автокорреляции 1-го порядка между членами временного ряда y_t и y_{t+2} (при устранении влияния y_{t+1}) равен

$$r_{\text{част}}(2) = \frac{r(2) - r(1)r(1,2)}{\sqrt{(1 - r^2(1))(1 - r^2(1,2))}},$$

где $r(1)$ – выборочный коэффициент автокорреляции между y_t и y_{t+1} ;

$r(2)$ – выборочный коэффициент автокорреляции между y_t и y_{t+2} ;

$r(1,2)$ – выборочный коэффициент автокорреляции между y_{t+1} и y_{t+2} .

Знание автокорреляционных функций $r(\tau)$ и $r_{\text{част}}(\tau)$ оказывает существенную помощь при подборе модели временного ряда и статистической оценке его параметров.

Пример 1.

По данным таблицы 1 для временного ряда y_t найти среднее значение, среднее квадратическое отклонение, коэффициенты автокорреляции (для лагов $\tau=1$ и $\tau=2$) и частный коэффициент автокорреляции 1-го порядка.

Среднее значение временного ряда равно

$$\bar{y}_t = \frac{1}{50} \sum_{t=1}^{50} y_t = \frac{56 + 79 + 74 + \dots + 181 + 225}{50} = \frac{6557}{50} = 131,4.$$

Дисперсия равна

$$s_t^2 = \overline{y_t^2} - (\bar{y}_t)^2 = 19362,02 - (131,4)^2 = 2164,3204,$$

где

$$\overline{y_t^2} = \frac{1}{50} \sum_{t=1}^{50} (y_t)^2 = \frac{56^2 + 79^2 + 74^2 + \dots + 181^2 + 225^2}{50} = 19362,02.$$

Среднее квадратическое отклонение

$$s_t = \sqrt{s_t^2} = \sqrt{2164,3204} = 46,52.$$

Для лага $\tau=1$ найдем коэффициент автокорреляции $r(1)$ – коэффициент корреляции между последовательностями 49 пар наблюдений y_t и y_{t+1} ($t = 1, 2, \dots, 49$):

y_t	56	79	74	42	71	74	98	87	61	74
y_{t+1}	79	74	42	71	74	98	87	61	74	62
y_t	62	113	103	82	104	91	116	91	132	121
y_{t+1}	113	103	82	104	91	116	91	132	121	113
y_t	113	95	117	99	126	153	148	138	158	135
y_{t+1}	95	117	99	126	153	148	138	158	135	151
y_t	151	142	178	165	171	152	171	159	144	163
y_{t+1}	142	178	165	171	152	171	159	144	163	158
y_t	158	190	182	208	192	219	189	204	181	
y_{t+1}	190	182	208	192	219	189	204	181	225	

Выполним промежуточные вычисления:

$$\sum_{t=1}^{49} y_t = 56 + 79 + \dots + 181 = 6332;$$

$$\sum_{t=1}^{49} y_t^2 = 56^2 + 79^2 + \dots + 181^2 = 917476;$$

$$\sum_{t=1}^{49} y_{t+1} = 79 + 74 + \dots + 225 = 6501;$$

$$\sum_{t=1}^{49} y_{t+1}^2 = 79^2 + 74^2 + \dots + 225^2 = 964965;$$

$$\sum_{t=1}^{49} y_t \cdot y_{t+1} = 56 \cdot 79 + 79 \cdot 74 + \dots + 181 \cdot 225 = 929059.$$

Найдем коэффициент автокорреляции

$$r(1) = \frac{49 \cdot 929059 - 6332 \cdot 6501}{\sqrt{49 \cdot 917476 - 6332^2} \cdot \sqrt{49 \cdot 964965 - 6501^2}} = 0,8824.$$

Выполним аналогичные вычисления для $\tau=2$ и найдем коэффициент автокорреляции $r(2)$ – коэффициент корреляции между последовательностями 48 пар наблюдений y_t и y_{t+2} ($t = 1, 2, \dots, 48$):

y_t	56	79	74	42	71	74	98	87	61	74
y_{t+2}	74	42	71	74	98	87	61	74	62	113
y_t	62	113	103	82	104	91	116	91	132	121
y_{t+2}	103	82	104	91	116	91	132	121	113	95
y_t	113	95	117	99	126	153	148	138	158	135
y_{t+2}	117	99	126	153	148	138	158	135	151	142
y_t	151	142	178	165	171	152	171	159	144	163
y_{t+2}	178	165	171	152	171	159	144	163	158	190
y_t	158	190	182	208	192	219	189	204		
y_{t+2}	182	208	192	219	189	204	181	225		

Выполним промежуточные вычисления:

$$\sum_{t=1}^{48} y_t = 56 + 79 + \dots + 204 = 6151;$$

$$\sum_{t=1}^{48} y_t^2 = 56^2 + 79^2 + \dots + 204^2 = 884715;$$

$$\sum_{t=1}^{48} y_{t+2} = 74 + 42 + \dots + 225 = 6422;$$

$$\sum_{t=1}^{48} y_{t+2}^2 = 74^2 + 42^2 + \dots + 225^2 = 958724;$$

$$\sum_{t=1}^{48} y_t \cdot y_{t+2} = 56 \cdot 74 + 79 \cdot 42 + \dots + 204 \cdot 225 = 929059.$$

Найдем коэффициент автокорреляции

$$r(2) = \frac{48 \cdot 929059 - 6151 \cdot 6422}{\sqrt{48 \cdot 884715 - 6151^2} \cdot \sqrt{48 \cdot 958724 - 6422^2}} = 0,902.$$

Аналогично найдем коэффициент автокорреляции $r(1, 2)$ между y_{t+1} и y_{t+2} :

y_{t+1}	79	74	42	71	74	98	87	61	74	62
y_{t+2}	74	42	71	74	98	87	61	74	62	113
y_{t+1}	113	103	82	104	91	116	91	132	121	113
y_{t+2}	103	82	104	91	116	91	132	121	113	95
y_{t+1}	95	117	99	126	153	148	138	158	135	151
y_{t+2}	117	99	126	153	148	138	158	135	151	142
y_{t+1}	142	178	165	171	152	171	159	144	163	158
y_{t+2}	178	165	171	152	171	159	144	163	158	190
y_{t+1}	190	182	208	192	219	189	204	181		
y_{t+2}	182	208	192	219	189	204	181	225		

Выполним промежуточные вычисления:

$$\sum_{t=1}^{48} y_{t+1} = 79 + 74 + \dots + 181 = 6276;$$

$$\sum_{t=1}^{48} y_{t+1}^2 = 79^2 + 74^2 + \dots + 181^2 = 914340;$$

$$\sum_{t=1}^{48} y_{t+2} = 74 + 42 + \dots + 225 = 6422;$$

$$\sum_{t=1}^{48} y_{t+2}^2 = 74^2 + 42^2 + \dots + 225^2 = 958724;$$

$$\sum_{t=1}^{48} y_{t+1} \cdot y_{t+2} = 79 \cdot 74 + 74 \cdot 42 + \dots + 181 \cdot 225 = 924635.$$

Найдем коэффициент автокорреляции

$$r(1, 2) = \frac{48 \cdot 924635 - 6276 \cdot 6422}{\sqrt{48 \cdot 914340 - 6276^2} \cdot \sqrt{48 \cdot 958724 - 6422^2}} = 0,8796.$$

Тогда частный коэффициент автокорреляции 1-го порядка между членами временного ряда y_t и y_{t+2} (при устранении влияния y_{t+1}) равен

$$r_{\text{част}}(2) = \frac{0,902 - 0,8824 \cdot 0,8796}{\sqrt{(1 - 0,8824^2)(1 - 0,8796^2)}} = 0,5626.$$

Аналитическое выравнивание временного ряда

При исследовании временного ряда одной из важнейших задач является выявление тренда – основной тенденции $f(t)$ изучаемого процесса (неслучайной составляющей) – с циклической и/или сезонной компонентой.

Предварительно выбирают вид функции $f(t)$; например, одну из следующих функций:

$$f(t) = b_0 + b_1 t - \text{линейная};$$

$$f(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_n t^n - \text{полиномиальная};$$

$$f(t) = e^{b_0 + b_1 t} - \text{экспоненциальная};$$

$$f(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}} - \text{логистическая}.$$

При подборе полиномиальной функции возможно использование метода конечных разностей – $\Delta_t = y_t - y_{t-1}$, $\Delta_t^2 = \Delta_t - \Delta_{t-1}$ и т.д. – порядок разностей, при которых они будут одинаковыми, принимается за степень полинома.

Для определения коэффициентов b_j можно использовать *метод наименьших квадратов*. Так, если рассматривать значения временного ряда как переменную, зависящую от времени по следующему закону

$$y_t = f(t) + \varepsilon_t,$$

где

ε_t – случайная составляющая (возмущения, представляющие собой независимые, одинаково распределенные случайные величины с нормальным распределением);

$f(t) = b_0 + b_1 t$ – неслучайная линейная составляющая,

то согласно методу наименьших квадратов коэффициенты b_0 и b_1 находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} b_0 n + b_1 \sum_{t=1}^n t = \sum_{t=1}^n y_t, \\ b_0 \sum_{t=1}^n t + b_1 \sum_{t=1}^n t^2 = \sum_{t=1}^n y_t \cdot t. \end{cases}$$

Пример 2.

По данным таблицы 1 найти уравнение тренда для временного ряда y_t , полагая тренд линейным.

Предварительно вычислим суммы, входящие в указанную выше систему уравнений, получим

$$\sum_{t=1}^{50} t = 1 + 2 + \dots + 50 = 1275,$$

$$\sum_{t=1}^{50} y_t = 56 + 79 + 74 + \dots + 181 + 225 = 6557,$$

$$\sum_{t=1}^{50} t^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 50^2 = 42925,$$

$$\sum_{t=1}^{50} y_t \cdot t = 56 \cdot 1 + 79 \cdot 2 + 74 \cdot 3 + \dots + 181 \cdot 49 + 225 \cdot 50 = 198918.$$

Подставив в систему

$$\begin{cases} 50 \cdot b_0 + 1275 \cdot b_1 = 6557, \\ 1275 \cdot b_0 + 42925 \cdot b_1 = 198918, \end{cases}$$

найдем решение $b_0 = 53,472$ и $b_1 = 3,046$.

Тогда уравнение тренда $\hat{y}_t = 53,472 + 3,046t$ (рисунок 2)

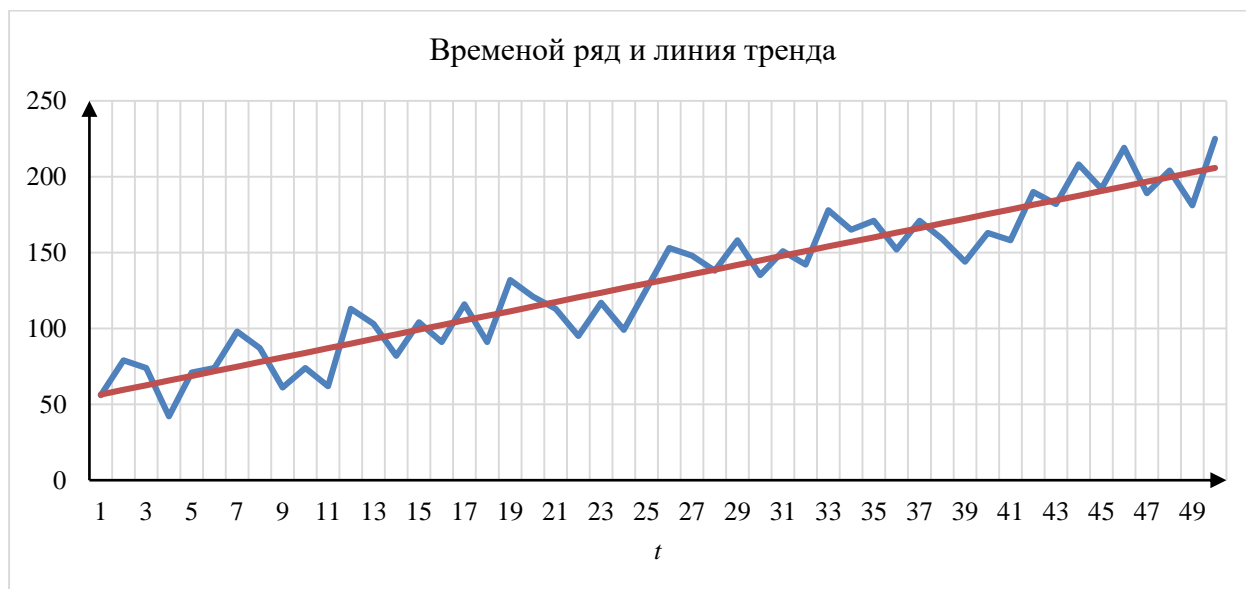


Рисунок 2

Проверим значимость полученного уравнения тренда по F -критерию (критерию Фишера-Снедекора) на 5% уровне значимости – уравнение линейной парной регрессии (в данном случае это уравнение тренда) значимо на уровне α , если

$$F = \frac{Q_R(n-2)}{Q_e} > F_{\alpha; 1; n-2},$$

где

$$Q_R = \sum_{t=1}^n (\hat{y}_t - \bar{y}_t)^2 = b_1^2 \left(\sum_{t=1}^n t^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^n t \right)^2 \right);$$

$$Q = \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y}_t)^2 = \sum_{t=1}^n y_t^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^n y_t \right)^2;$$

$$Q_e = Q - Q_R.$$

В нашем случае имеем

$$Q_R = 3,046^2 \left(42925 - \frac{(1275)^2}{50} \right) = 96596,35;$$

$$Q = 968101 - \frac{(6557)^2}{50} = 108216,02;$$

$$Q_e = Q - Q_R = 11619,67;$$

$$F = \frac{96596,35 \cdot 48}{11619,67} = 399,03 > F_{0,05; 1; 48} = 4,06.$$

Согласно критерию, уравнение тренда значимо.

Рассмотрим еще один метод выравнивания (сглаживания) временного ряда – *метод скользящих средних*. Метод основан на переходе к средним значениям ряда на интервале времени заданной фиксированной длины; для усреднения используют простую среднюю арифметическую, среднюю арифметическую с весами, медиану и т.п.

Пример 3.

По данным таблицы 1 провести сглаживание временного ряда y_t методом скользящих средних; для усреднения использовать простую среднюю арифметическую с интервалом сглаживания $m=3$.

Найдем скользящие средние по формуле

$$\tilde{y}_t = \frac{1}{m} \sum_{i=t-p}^{t+p} y_i,$$

где $m = 2p + 1$ – нечетное число.

В нашем случае

$$t = 2 \Rightarrow \tilde{y}_2 = \frac{1}{3} (y_1 + y_2 + y_3) = \frac{1}{3} (56 + 79 + 74) = 69,67;$$

$$t = 3 \Rightarrow \tilde{y}_3 = \frac{1}{3} (y_2 + y_3 + y_4) = \frac{1}{3} (79 + 74 + 42) = 65 \text{ и т. д.}$$

Получим следующий сглаженный ряд

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\tilde{y}_t	–	69,67	65	62,33	62,33	81	86,33	82	74	65,67
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
\tilde{y}_t	83	92,67	99,33	96,33	92,33	103,67	99,33	113	114,67	122
t	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
\tilde{y}_t	109,67	108,33	103,67	114	126	142,3	146,3	148	143,7	148
t	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
\tilde{y}_t	142,7	157	161,7	171,3	162,7	164,7	160,7	158	155,3	155

t	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
\tilde{y}_t	170,3	176,7	193,3	194	206,3	200	204	191,3	203,3	

На рисунке 3 этот ряд изображен пунктирной линией.

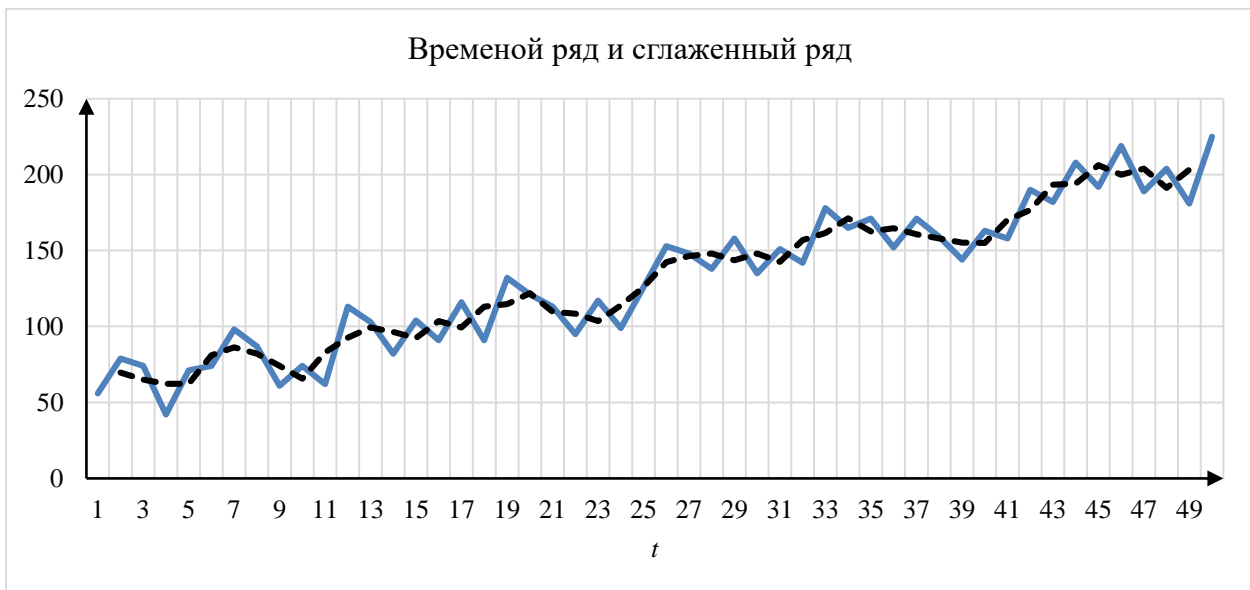


Рисунок 3

Прогнозирование на основе временных рядов

При прогнозировании развития изучаемого процесса на основе анализа временного ряда предполагают, что тенденция развития (тренд), установленная в прошлом, может быть экстраполирована на будущий период. К временному ряду как к регрессионной модели изучаемого признака применяются методы определения точечных и интервальных оценок парной и множественной регрессии.

Пример 4.

По данным таблицы 1 дать точечную и интервальную (с надежностью 0,95) оценки прогноза среднего и индивидуального значений спроса на товар на момент $t = 51$, полагая тренд линейным, а возмущения – независимыми, одинаково распределенными случайными величинами с нормальным распределением.

В примере 2 было получено уравнение тренда $\hat{y}_t = 53,472 + 3,046t$, т.е. ежемесячно спрос увеличивается в среднем на 3,046 ед.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	56	79	74	42	71	74	98	87	61	74
\hat{y}_t	56,52	59,56	62,61	65,66	68,70	71,75	74,79	77,84	80,88	83,93
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_t	62	113	103	82	104	91	116	91	132	121
\hat{y}_t	86,98	90,02	93,07	96,11	99,16	102,21	105,25	108,30	111,34	114,39

t	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
y_t	113	95	117	99	126	153	148	138	158	135
\hat{y}_t	117,43	120,48	123,53	126,6	129,6	132,7	135,7	138,8	141,8	144,8
t	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
y_t	151	142	178	165	171	152	171	159	144	163
\hat{y}_t	147,9	150,9	154	157	160,1	163,1	166,2	169,2	172,3	175,3
t	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
y_t	158	190	182	208	192	219	189	204	181	225
\hat{y}_t	178,4	181,4	184,4	187,5	190,5	193,6	196,6	199,7	202,7	205,8

Найдем точечную оценку спроса $\bar{y}(51)$:

$$\hat{y}_{t=51} = 53,472 + 3,046 \cdot 51 = 208,818.$$

Найдем точечную оценку дисперсии – исправленную дисперсию – по формуле:

$$s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{t=1}^n (\hat{y}_t - y_t)^2.$$

Получим

$$s^2 = \frac{1}{48} \sum_{t=1}^{50} (\hat{y}_t - y_t)^2 =$$

$$= \frac{1}{48} ((56,52 - 56)^2 + (59,56 - 79)^2 + \dots + (205,8 - 225)^2) = 242,08.$$

Оценим дисперсию групповой средней по формуле

$$s_{\hat{y}_{t=51}}^2 = s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(51 - \bar{t})^2}{\sum_{t=1}^n t^2 - \frac{1}{n} (\sum_{t=1}^n t)^2} \right), \quad \text{где } \bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n t.$$

Получим

$$s_{\hat{y}_{t=51}}^2 = 19,96; \quad s_{\hat{y}_{t=51}} = \sqrt{19,96} = 4,47.$$

Согласно критерию Стьюдента имеем $t_{0,95; 48} = 2,01$.

Интервальную оценку прогноза среднего значения спроса $\bar{y}(51)$ найдем по формуле

$$\hat{y}_{t=51} - t_{0,95; 48} \cdot s_{\hat{y}_{t=51}} \leq \bar{y}(51) \leq \hat{y}_{t=51} + t_{0,95; 48} \cdot s_{\hat{y}_{t=51}},$$

получим

$$199,8 \leq \bar{y}(51) \leq 217,8.$$

Чтобы найти интервальную оценку прогноза индивидуального значения $y^*(51)$, вычислим предварительно дисперсию его оценки по формуле

$$s_{\hat{y}_{t_0=51}}^2 = s^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(51 - \bar{t})^2}{\sum_{t=1}^n t^2 - \frac{1}{n} (\sum_{t=1}^n t)^2} \right), \quad \text{где } \bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n t.$$

Получим

$$s_{\hat{y}_{t_0=51}}^2 = 262,04; \quad s_{\hat{y}_{t_0=51}} = \sqrt{262,04} = 16,19.$$

Тогда интервальная оценка равна

$$\hat{y}_{t=51} - t_{0,95; 48} \cdot s_{\hat{y}_{t_0=51}} \leq y^*(51) \leq \hat{y}_{t=51} + t_{0,95; 48} \cdot s_{\hat{y}_{t_0=51}},$$

или

$$176,3 \leq y^*(51) \leq 241,4.$$

Таким образом, с надежностью 0,95 среднее значение спроса на товар будет заключено в интервале (199,8; 217,8), а его индивидуальное значение – в интервале (176,3; 241,4).

Такой прогноз может оказаться эффективным, как правило, в рамках краткосрочного прогнозирования.

Самостоятельная работа № 8

Тема: Подготовка к практическим занятиям: Элементы теории нечетких множеств.
Элементы теории оптимизации

Тема: Элементы теории нечетких множеств

Основные понятия

Понятие нечеткого множества - эта попытка математической формализации нечеткой информации для построения математических моделей сложных систем, в которых человек играет активную роль. Один из таких подходов к моделированию был предложен Л. Заде, он связан с введением так называемых лингвистических переменных, описывающих неточное (нечеткое) отражение человеком окружающего мира. Было расширено одно из базовых понятий математики - понятие множества – введено определение нечеткого множества и разработана теория нечетких множеств, включившая в себя обычные множества как частный случай. В основе понятия нечеткого множества лежит представление о том, что составляющие данное множество элементы, обладающие общим свойством, могут обладать этим свойством в различной степени и, следовательно, принадлежать к данному множеству с различной степенью.

Нечеткое множество X – совокупность пар $(x, \mu(x))$, где $x \in U$, U – универсальное множество, из элементов которого образованы все остальные множества, рассматриваемые в данной задаче; $\mu(x)$ – функция принадлежности элемента x нечеткому множеству X . Значение функции принадлежности $\mu(x)$, ($x \in U$) для каждого конкретного значения x показывает в какой степени элемент x принадлежит нечеткому множеству X .

Если мы рассматриваем принадлежность элемента x обычному множеству X , то множество значений функций $\mu(x)$ содержит два значения: 1 (если $x \in X$) и 0 (если $x \notin X$). В теории нечетких множеств $\mu(x)$ принимает значения из $[0, 1]$, при этом $\mu(x) = 1$ означает полную принадлежность элемента x к нечеткому множеству X , т.е. $x \in X$; $\mu(x) = 0$ означает отсутствие

принадлежности элемента x к нечеткому множеству X , т.е. $x \notin X$; $0 < \mu(x) < 1$ означает частичную принадлежность элемента x к нечеткому множеству X .

Пример 1

Пусть $U = \{a, b, c, d, e\}$, $X = \{(a; 0), (b; 0,1), (c; 0,5), (d; 0,9), (e; 1)\}$.

Тогда $a \notin X$, $e \in X$, b, c, d принадлежат множеству X с различной степенью (b – в малой степени, d – в значительной степени).

В различных приложениях используются различные функции принадлежности. В некоторых случаях значение $\mu(x)$ имеет смысл вероятности, но чаще $\mu(x)$ рассматривают как экспертную оценку принадлежности x к нечеткому множеству X .

Операции над нечеткими множествами

Пусть U – универсальное множество. X и Y – нечеткие множества с функциями принадлежности $\mu_X(x)$ и $\mu_Y(x)$ соответственно.

Множество X содержится во множестве Y (обозначают $X \subseteq Y$), если $\forall x \in U$ справедливо неравенство $\mu_X(x) \leq \mu_Y(x)$.

Множества X и Y равны (обозначают $X = Y$) тогда и только тогда, когда $\mu_X(x) = \mu_Y(x)$.

Объединением множеств X и Y называется множество $Z = X \cup Y$, функция принадлежности которого равна $\mu_Z(x) = \max\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\}$.

Пересечением множеств X и Y называется множество $Z = X \cap Y$, функция принадлежности которого равна $\mu_Z(x) = \min\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\}$.

Дополнением множества X до универсального множества U называется множество $Z = \bar{X}$, функция принадлежности которого $\mu_Z(x) = 1 - \mu_X(x)$.

Симметрической разностью множеств X и Y называется множество $X \oplus Y = (X \cap \bar{Y}) \cup (\bar{X} \cap Y)$, функция принадлежности этого множества равна $\mu_{X \oplus Y}(x) = \max\{\mu_{X \cap \bar{Y}}(x), \mu_{\bar{X} \cap Y}(x)\}$.

Применяются два вида расстояний между нечеткими множествами: евклидово расстояние и расстояние по Хеммингу, каждое из которых подразделяется на абсолютное и относительное. Формулы для вычисления расстояний приведены в таблице 1.

Таблица 1

	Евклидово расстояние	Расстояние по Хеммингу
Абсолютное	$E_{X,Y} = \sqrt{\sum_{x \in U} (\mu_X(x) - \mu_Y(x))^2}$	$\Delta_{X,Y} = \sum_{x \in U} \mu_X(x) - \mu_Y(x) $
Относительное	$\varepsilon_{X,Y} = \frac{E_{X,Y}}{\sqrt{n}}$	$\delta_{X,Y} = \frac{\Delta_{X,Y}}{n}$

Пусть даны множества X и X_0 с функциями принадлежности $\mu_X(x)$ и $\mu_{X_0}(x)$ соответственно, причем $\mu_{X_0}(x) \in \{0, 1\}$. Множество X_0 называют обычным множеством, ближайшим к X , если

$$\mu_{X_0}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_X(x) < 0,5; \\ 1, & \text{если } \mu_X(x) > 0,5; \\ 0 \text{ или } 1, & \text{если } \mu_X(x) = 0,5. \end{cases}$$

Индексом нечеткости называется величина, характеризующая степень нечеткости множества, зависящая от расстояния между нечетким множеством и ближайшим к нему обычным множеством и принимающая значение из $[0, 1]$:

$$J_X = 2\varepsilon_{X, X_0} \text{ (по Евклиду)}, J_X = 2\delta_{X, X_0} \text{ (по Хеммингу)}.$$

Пример 2

Пусть $U = \{u_1, u_2, \dots, u_8\}$, $X = \{(x; \mu_X(x))\}$, $Y = \{(y; \mu_Y(y))\}$, $x, y \in U$.

Таблица 2.

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
$\mu_X(x)$	0,1	0,6	0,9	1	0,5	0,8	0,4	0,5
$\mu_Y(y)$	0,7	0,5	1	0,6	0,4	0,3	0	0,2

Представим множества X и Y геометрически, для этого по оси абсцисс отложим элементы универсального множества, по оси ординат – значения функций принадлежности, получившиеся точки соединим отрезками прямых – получим ломаные, указанные на рисунке 5.1.

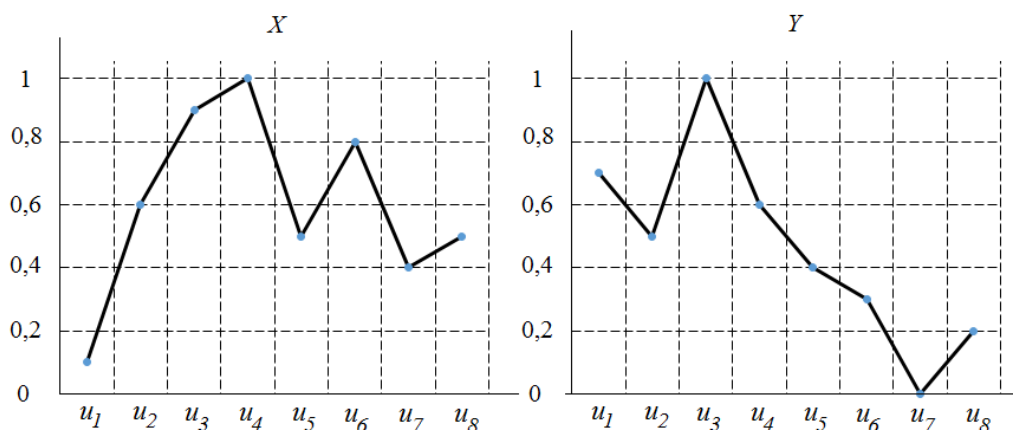


Рисунок 1

Найдем функции принадлежности множеств \bar{X} , \bar{Y} , $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \oplus Y$.

Таблица 3

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
$\mu_X(x)$	0,1	0,6	0,9	1	0,5	0,8	0,4	0,5
$\mu_Y(y)$	0,7	0,5	1	0,6	0,4	0,3	0	0,2
$\mu_{\bar{X}}(x)$	0,9	0,4	0,1	0	0,5	0,2	0,6	0,5
$\mu_{\bar{Y}}(x)$	0,3	0,5	0	0,4	0,6	0,7	1	0,8
$\mu_{X \cup Y}(x)$	0,7	0,6	1	1	0,5	0,8	0,4	0,5
$\mu_{X \cap Y}(x)$	0,1	0,5	0,9	0,6	0,4	0,3	0	0,2

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
$\mu_{X \cap \bar{Y}}(x)$	0,1	0,5	0	0,4	0,5	0,7	0,4	0,5
$\mu_{\bar{X} \cap Y}(x)$	0,7	0,4	0,1	0	0,4	0,2	0	0,2
$\mu_{X \oplus Y}(x)$	0,7	0,5	0,1	0,4	0,5	0,7	0,4	0,5

Представим множества $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \oplus Y$ геометрически (рисунок 2).

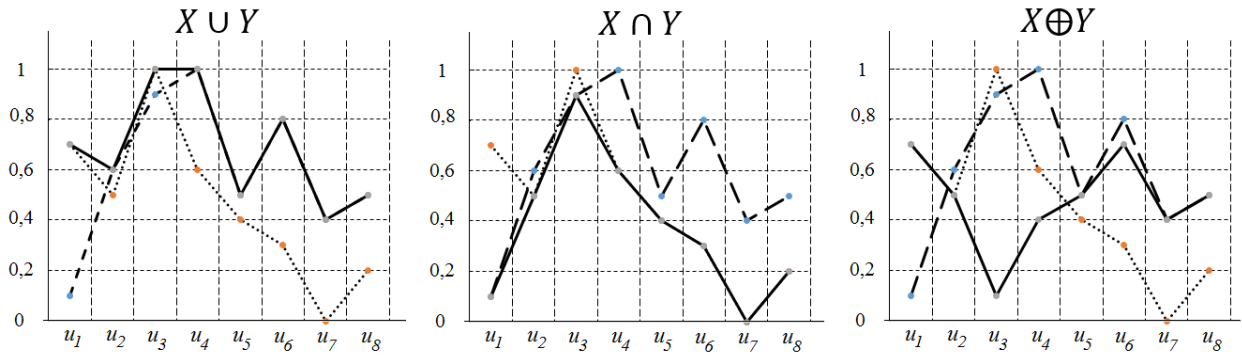


Рисунок 2

Найдем расстояния между множествами X и Y .

Абсолютное евклидово расстояние:

$$E_{X,Y} = \sqrt{0,6^2 + 0,1^2 + 0,1^2 + 0,4^2 + 0,1^2 + 0,5^2 + 0,4^2 + 0,3^2} = \sqrt{1,05} \approx 1,025.$$

Относительное евклидово расстояние:

$$\varepsilon_{X,Y} = \frac{\sqrt{1,05}}{\sqrt{8}} \approx 0,357.$$

Абсолютное расстояние по Хеммингу:

$$\Delta_{X,Y} = 0,6 + 0,1 + 0,1 + 0,4 + 0,1 + 0,5 + 0,4 + 0,3 = 2,5.$$

Относительное расстояние по Хеммингу:

$$\delta_{X,Y} = \frac{2,5}{8} = 0,3125.$$

Найдем обычные множества X_0 и Y_0 , ближайšie к X и Y соответственно.

Таблица 4

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
$\mu_X(x)$	0,1	0,6	0,9	1	0,5	0,8	0,4	0,5
$\mu_{X_0}(x)$	0	1	1	1	0	1	0	0
$\mu_Y(y)$	0,7	0,5	1	0,6	0,4	0,3	0	0,2
$\mu_{Y_0}(x)$	1	0	1	1	0	0	0	0

Вычислим для каждого множества индексы нечеткости.

По Евклиду:

$$E_{X,X_0} = \sqrt{0,1^2 + 0,4^2 + 0,1^2 + 0^2 + 0,5^2 + 0,2^2 + 0,4^2 + 0,5^2} = \sqrt{0,88} \approx 0,938,$$

$$J_X = 2\varepsilon_{X,X_0} = \frac{2\sqrt{0,88}}{\sqrt{8}} \approx 0,664;$$

$$E_{Y,Y_0} = \sqrt{0,3^2 + 0,5^2 + 0^2 + 0,4^2 + 0,4^2 + 0,3^2 + 0^2 + 0,2^2} = \sqrt{0,79} \approx 0,889,$$

$$J_Y = 2\varepsilon_{Y,Y_0} = \frac{2\sqrt{0,79}}{\sqrt{8}} \approx 0,629.$$

По Хеммингу:

$$\Delta_{X,X_0} = 0,1 + 0,4 + 0,1 + 0 + 0,5 + 0,2 + 0,4 + 0,5 = 2,2,$$

$$J_X = 2\delta_{X,X_0} = \frac{2 \cdot 2,2}{8} = 0,55;$$

$$\Delta_{Y,Y_0} = 0,3 + 0,5 + 0 + 0,4 + 0,4 + 0,3 + 0 + 0,2 = 2,1,$$

$$J_Y = 2\delta_{Y,Y_0} = \frac{2 \cdot 2,1}{8} = 0,525.$$

Функции от нечетких переменных

Функция от нечетких переменных – это функция вида $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$.

Операции над нечеткими переменными:

- отрицание: $\bar{x} = 1 - x$;
- конъюнкция: $x_1 \wedge x_2 = \min(x_1, x_2)$;
- дизъюнкция: $x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2)$;
- кольцевая сумма: $x_1 \oplus x_2 = \max\{\min(\bar{x}_1, x_2), \min(x_1, \bar{x}_2)\}$.

Пример 3

Рассмотрим функцию двух нечетких переменных

$$f(x_1, x_2) = (x_1 \wedge x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2),$$

где $x_1 \in [0,2; 0,6)$ и $x_2 \in [0,4; 0,8)$.

Найдем значение функции при $x_1 = 0,4$, $x_2 = 0,65$.

Выполним промежуточные действия:

$$\bar{x}_1 = 1 - 0,4 = 0,6, \quad \bar{x}_2 = 1 - 0,65 = 0,35,$$

$$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = \max(0,6; 0,35) = 0,6, \quad x_1 \wedge x_2 = \min(0,4; 0,65) = 0,4,$$

$$x_1 \wedge x_2 \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) = \min(0,4; 0,6) = 0,4.$$

Получим $f(0,4; 0,65) = 0,4$.

Найдем интервал значений функции, воспользовавшись следующими правилами:

$$x_1 \in [a_1; b_1), x_2 \in [a_2; b_2) \Rightarrow x_1 \wedge x_2 \in [\min(a_1; a_2), \min(b_1; b_2));$$

$$x \in [a; b) \Rightarrow \bar{x} \in (1 - b; 1 - a];$$

$$x_1 \in [a_1; b_1), x_2 \in [a_2; b_2) \Rightarrow \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \in (\max(a_1; a_2); \max(b_1; b_2)].$$

Получим

$$x_1 \wedge x_2 \in [\min(0,2; 0,4), \min(0,6; 0,8)] = [0,2; 0,6);$$

$$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \in (\max(0,2; 0,4); \max(0,6; 0,8)] = (0,4; 0,8];$$

$$(x_1 \wedge x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \in [\min(0,2; 0,4), \min(0,6; 0,8)] = [0,2; 0,6).$$

В таблице 5 приведены условия, обеспечивающие попадание нечеткой функции $y = f(x_1, x_2)$ в заданный интервал $[a; b)$.

Таблица 5

Функция	Условия, обеспечивающие нижнюю границу	Условия, обеспечивающие верхнюю границу
\bar{x}	$x \leq 1 - a$	$x > 1 - b$
$x_1 \wedge x_2$	$\begin{cases} x_1 \geq a \\ x_2 \geq a \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 < b \\ x_2 < b \end{cases}$
$\bar{x}_1 \wedge x_2$	$\begin{cases} x_1 \leq 1 - a \\ x_2 \geq a \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 > 1 - b \\ x_2 < b \end{cases}$
$\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$	$\begin{cases} x_1 \leq 1 - a \\ x_2 \leq 1 - a \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 > 1 - b \\ x_2 > 1 - b \end{cases}$
$x_1 \vee x_2$	$\begin{cases} x_1 \geq a \\ x_2 \geq a \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 < b \\ x_2 < b \end{cases}$
$\bar{x}_1 \vee x_2$	$\begin{cases} x_1 \leq 1 - a \\ x_2 \geq a \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 > 1 - b \\ x_2 < b \end{cases}$
$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$	$\begin{cases} x_1 \leq 1 - a \\ x_2 \leq 1 - a \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 > 1 - b \\ x_2 > 1 - b \end{cases}$

Нечеткие числа

Нечеткое число – нечеткое подмножество множества действительных чисел. Нечеткие числа используются для обозначения неточно определенных величин («дорогой», «дешевый» «старый» и т.п.).

Пусть $A = \{\mathbb{R}, \mu_1(x)\}$, $B = \{\mathbb{R}, \mu_2(x)\}$ – нечеткие числа. Рассмотрим операции над нечеткими числами:

- сумма $A + B = \{\mathbb{R}, \mu(x) = \max(\mu_1(x), \mu_2(x))\}$;
- произведение $A \cdot B = \{\mathbb{R}, \mu(x) = \min(\mu_1(x), \mu_2(x))\}$;
- отрицание $\bar{A} = \{\mathbb{R}, \mu(x) = 1 - \mu_1(x)\}$.

Пример 4

В зимнюю сессию студенты сдают три экзамена: иностранный язык (e), философию (f), психологию (p); X – процент студентов, успешно сдавших экзамен, для каждой дисциплины является нечетким числом. Функции $\mu_e(x)$, $\mu_f(x)$, $\mu_p(x)$ представляют собой прогнозы, сделанные на основании анализа результатов предыдущих сессий.

Записать нечеткие числа: Y_1 – процент студентов, сдавших не менее двух экзаменов, Y_2 – процент студентов, не сдавших хотя бы один экзамен.

Таблица 6

%	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
$\mu_e(x)$	0,7	0,7	0,6	0,5	0,5	0,4	0,2	0,1	0	0	0
$\mu_f(x)$	0,9	0,9	0,9	0,8	0,7	0,6	0,4	0,4	0,2	0,1	0
$\mu_p(x)$	0,9	0,9	0,8	0,8	0,7	0,6	0,6	0,5	0,4	0,2	0,2

Пусть X_1, X_2, X_3 – число студентов, сдавших иностранный язык, философию и психологию соответственно; $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$ – число студентов, не сдавших соответствующие экзамены. Тогда

$$Y_1 = X_1 X_2 X_3 + \bar{X}_1 X_2 X_3 + X_1 \bar{X}_2 X_3 + X_1 X_2 \bar{X}_3;$$

$$Y_2 = \bar{X}_1 X_2 X_3 + X_1 \bar{X}_2 X_3 + X_1 X_2 \bar{X}_3 + \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 + X_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 + \bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3 + \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3.$$

Заметим, что в рамках теории нечетких множеств не выполняется закон исключения третьего: $\mu(X + \bar{X}) = \max(\mu_1(x), 1 - \mu_1(x)) \neq 1$; а $Y_2 \neq \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3$.

Все вычисления оформим в виде таблицы.

Таблица 7

X	$\mu(x)$	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
X_1	$\mu_e(x)$	0,7	0,7	0,6	0,5	0,5	0,4	0,2	0,1	0	0	0
X_2	$\mu_f(x)$	0,9	0,9	0,9	0,8	0,7	0,6	0,4	0,4	0,2	0,1	0
X_3	$\mu_p(x)$	0,9	0,9	0,8	0,8	0,7	0,6	0,6	0,5	0,4	0,2	0,2
\bar{X}_1	$1 - \mu_e(x)$	0,3	0,3	0,4	0,5	0,5	0,6	0,8	0,9	1	1	1
\bar{X}_2	$1 - \mu_f(x)$	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,6	0,8	0,9	1
\bar{X}_3	$1 - \mu_p(x)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,4	0,4	0,5	0,6	0,8	0,8
$X_1 X_2 X_3$	$\min(\mu_e(x), \mu_f(x), \mu_p(x))$	0,7	0,7	0,6	0,5	0,5	0,4	0,2	0,1	0	0	0
$X_1 X_2 \bar{X}_3$	$\min(\mu_e(x), \mu_f(x), 1 - \mu_p(x))$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,4	0,2	0,1	0	0	0

X	$\mu(x)$	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
$X_1\bar{X}_2\bar{X}_3$	$\min(\mu_e(x), 1 - \mu_f(x), 1 - \mu_p(x))$	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,2	0,1	0	0	0
$X_1\bar{X}_2X_3$	$\min(\mu_e(x), 1 - \mu_f(x), \mu_p(x))$	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,2	0,1	0	0	0
$\bar{X}_1\bar{X}_2X_3$	$\min(1 - \mu_e(x), 1 - \mu_f(x), \mu_p(x))$	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,5	0,4	0,2	0,2
$\bar{X}_1X_2X_3$	$\min(1 - \mu_e(x), \mu_f(x), \mu_p(x))$	0,3	0,3	0,4	0,5	0,5	0,6	0,4	0,4	0,2	0,1	0
$\bar{X}_1X_2\bar{X}_3$	$\min(1 - \mu_e(x), \mu_f(x), 1 - \mu_p(x))$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,4	0,4	0,4	0,2	0,1	0
$\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3$	$\min(1 - \mu_e(x), 1 - \mu_f(x), 1 - \mu_p(x))$	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,4	0,5	0,6	0,8	0,8
Y_1	$\mu_{Y_1}(x)$	0,7	0,7	0,6	0,5	0,5	0,6	0,4	0,4	0,2	0,1	0
Y_2	$\mu_{Y_2}(x)$	0,3	0,3	0,4	0,5	0,5	0,6	0,6	0,5	0,6	0,8	0,8

Нечеткие отношения

Обычным *бинарным отношением* на множестве A называется подмножество Γ декартова квадрата $A \times A$, состоящего из всех упорядоченных пар элементов множества A и только из них: $\Gamma \subseteq A \times A$.

Способы задания бинарного отношения на множестве $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$:

- характеристическим свойством, раскрывающим смысловое содержание связи, объединяющей элементы в пары;
- графом – совокупностью вершин (элементов множества) и ребер (связей между элементами);
- матрицей инциденций, элементы которой равны

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_i, a_j) \in \Gamma, \\ 0, & \text{если } (a_i, a_j) \notin \Gamma. \end{cases}$$

Нечеткое бинарное отношение – пара $(\Gamma, \mu(a_i, a_j))$, где $\Gamma \subseteq A \times A$ и функция принадлежности $\mu(a_i, a_j) \in [0, 1]$.

Граф нечеткого отношения является сетью (ориентированный граф со взвешенными ребрами), веса ребер которой равны значениям функции принадлежности.

Элементы матрицы инциденций равны $a_{ij} = \mu(a_i, a_j)$.

Свойства нечетких бинарных отношений $(\Gamma, \mu(a_i, a_j))$,

где $\Gamma \subseteq A \times A$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

- $\forall a \in A \quad \mu(a, a) = 1$;
- $\forall a_i, a_j \in A \quad \mu(a_i, a_j) = \mu(a_j, a_i)$;
- $\forall a_i, a_j \in A: \mu(a_i, a_j) = 1 \wedge \mu(a_j, a_i) = 1 \Rightarrow a_i = a_j$;
- $\forall a_i, a_j, a_k \in A \quad \mu(a_i, a_k) \geq \max_{j=1,2,\dots,n} \left(\min \mu(a_i, a_j), \mu(a_j, a_k) \right)$.

К нечетким отношениям применимы все операции и оценки для нечетких множеств.

Пример 5

На множестве $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ матрицей инценций J задано нечеткое отношение $\rho(a, b)$: "a влияет на b", ($a, b \in A$).

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,6 & 0,7 & 0,8 & 0,9 \\ 0,2 & 1 & 0,8 & 0,2 & 0,7 & 0,8 \\ 0 & 0 & 1 & 0,4 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0,8 & 0,9 \\ 0 & 0,1 & 0,4 & 0,3 & 1 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,5 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$$

Укажем смысловое значение элементов матрицы – степени влияния одного элемента множества на другой. Например, $a_{45} = 0,8$ означает, что степень влияния элемента a_4 на элемент a_5 оценена экспертами достаточно высоко, в то время как элемент a_5 мало влияет на элемент a_2 (т.к. $a_{52} = 0,1$) и т.д. Полагают, что влияние элемента на самого себя максимально – $a_{ii} = 1$.

Составим матрицу инценций графа обычного отношения, ближайшего к данному:

$$J_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и построим граф этого отношения (рис. 3)

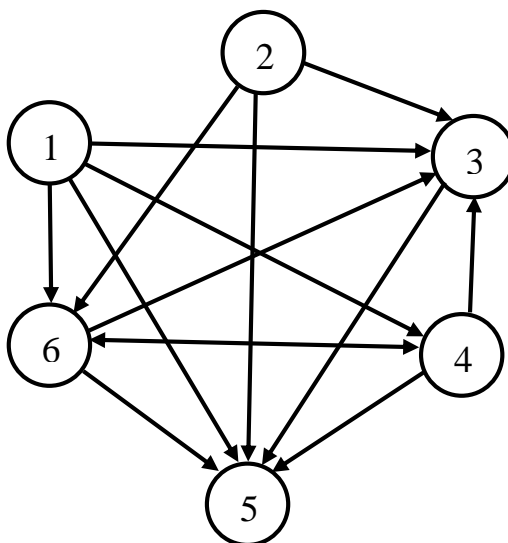


Рисунок 3

Найдем матрицу опосредованного влияния J^2 :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,8 & 0,7 & 0,8 & 0,9 \\ 0,2 & 1 & 0,8 & 0,5 & 0,7 & 0,8 \\ 0 & 0 & 1 & 0,4 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0,8 & 0,9 \\ 0,1 & 0 & 0,4 & 0,4 & 1 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,5 & 0,6 & 1 \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы вычисляются по следующему правилу:

$$a_{ij}^2 = \max(\min(a_{i1}, a_{1j}), \min(a_{i2}, a_{2j}), \dots, \min(a_{in}, a_{nj})).$$

Найдем матрицу скрытых опосредованных влияний (влияний, которые не были учтены экспертами):

$$J^2 - J = \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проанализируем результат на примере элемента $s_{42} = 0,3$.

$$s_{24} = a_{24}^2 - a_{24} = 0,5 - 0,2;$$

$$0,5 = \min(a_{26}, a_{64}) = \min(0,8; 0,5).$$

Вывод a_2 значительно влияет на a_6 , a_6 имеет существенное влияние на a_4 , что приводит к увеличению влияния a_2 на a_4 через посредство a_6 (это влияние не было учтено экспертами).

Пример практического использования теории нечетких множеств - многокритериальный анализ проектов и принятие решений в нечетких условиях по схеме Беллмана-Заде

Пусть имеется множество проектов $P = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ и множество критериев оценки данных проектов $G = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$, среди которых могут быть как качественные, так и количественные.

Для принятия решения (выбора проекта) требуется упорядочить элементы множества проектов P по критериям G (опираясь на требование: чем сильнее слабейшее звено, тем лучше проект).

Критерии будем рассматривать как *нечеткие множества*, заданные на универсальном множестве альтернатив с помощью функции принадлежности.

Функции принадлежности нечетких множеств определяются по экспертным парным сравнениям альтернатив.

Коэффициенты относительной важности критериев определяются с помощью метода парных сравнений Саати.

Решение принимается по схеме Беллмана-Заде.

Критерий G_j представим нечетким множеством \tilde{G}_j на универсальном множестве проектов P :

$$\tilde{G}_j = \left\{ \frac{\mu_{G_j}(P_1)}{P_1}, \frac{\mu_{G_j}(P_2)}{P_2}, \dots, \frac{\mu_{G_j}(P_k)}{P_k} \right\}, \quad (1)$$

где $\mu_{G_j}(P_i) \in [0; 1]$ – степень принадлежности элемента P_i нечеткому множеству \tilde{G}_j .

Построим функции принадлежности на основе парных сравнений. Исходной информацией для построения функций принадлежности являются экспертные парные сравнения. Для каждой пары проектов эксперт по критерию G_j , ($j = \overline{1, n}$) оценивает преимущество одного варианта над другим. Парные сравнения удобно представлять следующей матрицей:

$$A = \begin{matrix} & P_1 & P_2 & \dots & P_k \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_k \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \end{matrix},$$

где a_{ij} – уровень преимущества проекта P_i над проектом P_j , ($i, j = \overline{1, k}$), определяемый по девятибальной шкале Саати:

- 1 – если преимущество **отсутствует**;
- 3 – если преимущество **слабое**;
- 5 – если имеется преимущество **существенное**;
- 7 – если имеется преимущество **явное/сильное**;
- 9 – если имеется преимущество **абсолютное**;
- 2, 4, 6, 8 – промежуточные сравнительные оценки.

Матрица парных сравнений является *диагональной* ($a_{ij} = 1, i = j$) и *обратно симметричной* ($a_{ij} = 1/a_{ji}, i, j = \overline{1, k}$).

Степени принадлежности принимаются равными соответствующим координатам собственного вектора $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ матрицы парных сравнений A :

$$\mu_{G_j}(P_i) = w_i, i = \overline{1, k}.$$

Собственный вектор находится из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} A \cdot W = \lambda_{max} \cdot W, \\ w_1 + w_2 + \dots + w_k = 1, \end{cases} \quad (2)$$

где λ_{max} – максимальное собственное значение матрицы A .

Отклонение λ_{max} от k может служить мерой несогласованности парных сравнений эксперта.

При согласованных парных сравнениях процедура построения функций принадлежности значительно упрощается, т.к. матрица парных сравнений в этом случае транзитивна

($a_{il} \cdot a_{lj} = a_{ij}, i, j, l = \overline{1, k}$), что позволяет определить все элементы матрицы парных сравнений, если известны $(k - 1)$ недиагональных элементов. Например, если известны элементы $a_{lj}, j, l = \overline{1, k}$, то произвольный элемент $a_{ij} = a_{lj}/a_{li}$.

При этом степени принадлежности, нечеткого множества вычисляются по формуле:

$$\mu(P_i) = \frac{1}{a_{1i} + a_{2i} + \dots + a_{ki}}.$$

Согласно принципу Беллмана-Заде, наилучшей будет альтернатива, которая в наибольшей степени одновременно удовлетворяет всем критериям.

Нечеткое решение есть пересечение частных критериев:

$$\tilde{D} = \tilde{G}_1^{\alpha_1} \cap \tilde{G}_2^{\alpha_2} \cap \dots \cap \tilde{G}_n^{\alpha_n} == \left\{ \frac{\min_{i=1, n} (\mu_{G_i}^{\alpha_i}(P_1))}{P_1}, \frac{\min_{i=1, n} (\mu_{G_i}^{\alpha_i}(P_2))}{P_2}, \dots, \frac{\min_{i=1, n} (\mu_{G_i}^{\alpha_i}(P_k))}{P_k} \right\}, \quad (3)$$

где α_i – коэффициент относительной важности критерия G_i ,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1.$$

В соответствии с нечетким решением наилучшим будет проект с максимальной степенью принадлежности:

$$D = \arg \max (\mu_D(P_1), \mu_D(P_2), \dots, \mu_D(P_k)). \quad (4)$$

Пример 6.

Построить функцию принадлежности нечеткого множества "высокий мужчина" на универсальном множестве

{170, 175, 180, 185, 190, 195},

если известны такие экспертные парные сравнения:

- абсолютное преимущество 195 над 170;
- явное преимущество 195 над 175;
- существенное преимущество 195 над 180;

- слабое преимущество 195 над 185;
- отсутствует преимущество 195 над 190.

Приведенным экспертным высказываниям соответствует такая матрица парных сравнений:

$$A = \begin{matrix} & 170 & 175 & 180 & 185 & 190 & 195 \\ \begin{matrix} 170 \\ 175 \\ 180 \\ 185 \\ 190 \\ 195 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 7/9 & 5/9 & 1/3 & 1/9 & 1/9 \\ 9/7 & 1 & 5/7 & 3/7 & 1/7 & 1/7 \\ 9/5 & 7/5 & 1 & 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 3 & 7/3 & 5/3 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ \mathbf{9} & \mathbf{7} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Полужирным шрифтом выделенные элементы, соответствующие парным сравнениям из условия примера. Степени принадлежности приведены в таблице 8. Для нормализации нечеткого множества разделим все степени принадлежности на максимальное значение, т.е. на 0.3588. Графики функций принадлежности субнормального и нормального нечеткого множества "высокий мужчина" приведены на рис.4.

Таблица 8

	170	175	180	185	190	195
μ высокий мужчина (субнормальное нечеткое множество)	0.0399	0.0513	0.0718	0.1196	0.3588	0.3588
μ высокий мужчина (нормальное нечеткое множество)	0.1111	0.1429	0.2000	0.3333	1.0000	1.0000

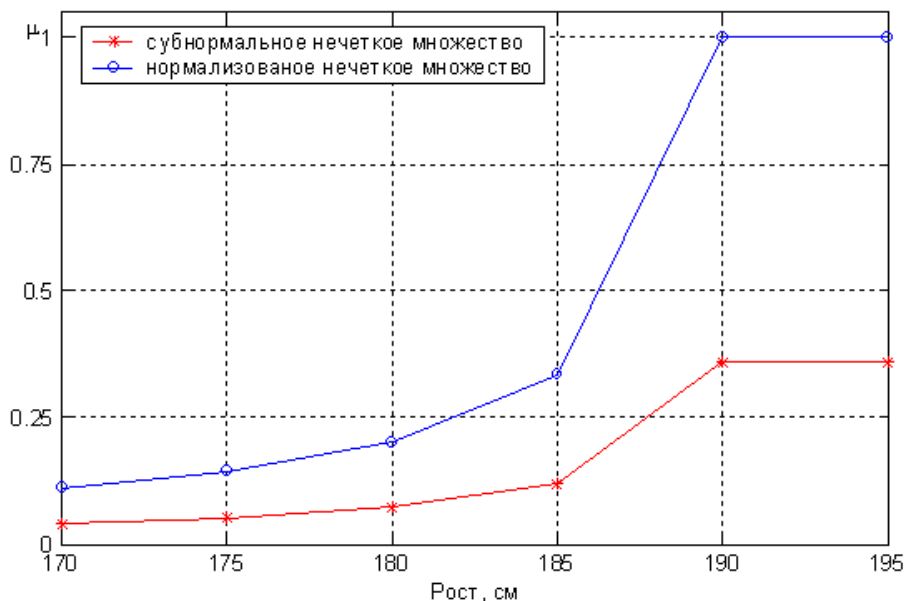


Рисунок 4 - функции принадлежности нечеткого множества "высокий мужчина"

Пример 7.

Сравнить четыре проекта создания бренда по следующим критериям оценки бренд-проектов:

- степень проработки проекта;
- ожидаемый эффект;
- риски;
- скорость выведения бренда на рынок;
- перспективы развития бренда;
- стоимость проекта.

Экспертные парные сравнения проектов $P_1 - P_4$ по критериям $G_1 - G_6$ и соответствующие им матрицы парных сравнений приведены в таблице 9.

Таблица 9 – Парные сравнения проектов

Критерий	Парные сравнения	Матрицы парных сравнений
G_1	отсутствует преимущество P_1 перед P_2 слабое преимущество P_1 перед P_3 существенное преимущество P_1 перед P_4 слабое преимущество P_2 перед P_3 существенное преимущество P_2 перед P_4 слабое преимущество P_3 перед P_4	$A(G_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1/3 & 1 & 3 & 5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$
G_2	слабое преимущество P_1 перед P_2 существенное преимущество P_1 перед P_3 сильное преимущество P_1 перед P_4 почти слабое преимущество P_2 перед P_3 слабое преимущество P_2 перед P_4 почти слабое преимущество P_3 перед P_4	$A(G_2) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1/3 & 1 & 2 & 3 \\ 1/5 & 1/2 & 1 & 2 \\ 1/7 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$
G_3	существенное преимущество P_1 перед P_2 отсутствует преимущество P_1 перед P_3 сильное преимущество P_1 перед P_4 слабое преимущество P_2 перед P_3 существенное преимущество P_2 перед P_4 сильное преимущество P_3 перед P_4	$A(G_3) = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 7 \\ 1/5 & 1 & 1/5 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 7 \\ 1/7 & 1/3 & 1/7 & 1 \end{bmatrix}$
G_4	слабое преимущество P_2 перед P_1 отсутствует преимущество P_2 перед P_4 слабое преимущество P_4 перед P_1 существенное преимущество P_3 перед P_1 почти слабое преимущество P_3 перед P_2 слабое преимущество P_3 перед P_4	$A(G_4) = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/5 & 1/3 \\ 3 & 1 & 1/2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$
G_5	слабое преимущество P_2 перед P_1 отсутствует преимущество P_2 перед P_3 слабое преимущество P_3 перед P_1 существенное преимущество P_4 перед P_1 слабое преимущество P_4 перед P_2 почти слабое преимущество P_4 перед P_3	$A(G_5) = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/5 \\ 3 & 1 & 1 & 1/3 \\ 3 & 1 & 1 & 1/2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
G_6	сильное преимущество P_2 перед P_1 слабое преимущество P_2 перед P_3 отсутствует преимущество P_2 перед P_4 слабое преимущество P_3 перед P_1 сильное преимущество P_4 перед P_1 слабое преимущество P_4 перед P_3	$A(G_6) = \begin{bmatrix} 1 & 1/7 & 1/3 & 1/7 \\ 7 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 7 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Для каждой матрицы найдем по формуле (2) наибольшее собственное значение и соответствующий ему собственный вектор, координаты которого определяют степени принадлежности элемента P_i нечеткому множеству \tilde{G}_j . Получим следующие нечеткие множества:

$$\tilde{G}_1 = \left\{ \frac{0,39}{P_1}, \frac{0,39}{P_2}, \frac{0,15}{P_3}, \frac{0,07}{P_4} \right\}, \tilde{G}_2 = \left\{ \frac{0,59}{P_1}, \frac{0,22}{P_2}, \frac{0,12}{P_3}, \frac{0,07}{P_4} \right\},$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_3 &= \left\{ \frac{0,42}{P_1}, \frac{0,11}{P_2}, \frac{0,42}{P_3}, \frac{0,07}{P_4} \right\}, \tilde{G}_4 = \left\{ \frac{0,08}{P_1}, \frac{0,23}{P_2}, \frac{0,48}{P_3}, \frac{0,21}{P_4} \right\}, \\ \tilde{G}_5 &= \left\{ \frac{0,08}{P_1}, \frac{0,21}{P_2}, \frac{0,23}{P_3}, \frac{0,48}{P_4} \right\}, \tilde{G}_6 = \left\{ \frac{0,06}{P_1}, \frac{0,4}{P_2}, \frac{0,14}{P_3}, \frac{0,4}{P_4} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Получили, что не существует проекта, доминирующего по всем критериям. в этом случае выбор проекта зависит от важности критериев.

Пусть экспертным парным сравнениям важности критериев соответствует такая матрица парных сравнений:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 1/2 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 1/4 & 1/6 & 1/5 & 1 & 1/3 & 1/2 \\ 1 & 1/3 & 1/2 & 3 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/5 & 1/3 & 2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

По данной матрице находим коэффициенты важности критериев:

$$\alpha_1 = 0,15; \alpha_2 = 0,34; \alpha_3 = 0,26; \alpha_4 = 0,05; \alpha_5 = 0,13; \alpha_6 = 0,07,$$

т.е. наиболее важные при принятии решения критерии G_2 и G_3

Далее найдем следующие нечеткие множества:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1^{\alpha_1} &= \left\{ \frac{0,39^{0,15}}{P_1}, \frac{0,39^{0,15}}{P_2}, \frac{0,15^{0,15}}{P_3}, \frac{0,07^{0,15}}{P_4} \right\} = \left\{ \frac{0,868}{P_1}, \frac{0,868}{P_2}, \frac{0,753}{P_3}, \frac{0,667}{P_4} \right\}, \\ \tilde{G}_2^{\alpha_2} &= \left\{ \frac{0,59^{0,34}}{P_1}, \frac{0,22^{0,34}}{P_2}, \frac{0,12^{0,34}}{P_3}, \frac{0,07^{0,34}}{P_4} \right\} = \left\{ \frac{0,835}{P_1}, \frac{0,596}{P_2}, \frac{0,49}{P_3}, \frac{0,409}{P_4} \right\}, \\ \tilde{G}_3^{\alpha_3} &= \left\{ \frac{0,42^{0,26}}{P_1}, \frac{0,11^{0,26}}{P_2}, \frac{0,42^{0,26}}{P_3}, \frac{0,07^{0,26}}{P_4} \right\} = \left\{ \frac{0,797}{P_1}, \frac{0,552}{P_2}, \frac{0,797}{P_3}, \frac{0,456}{P_4} \right\}, \\ \tilde{G}_4^{\alpha_4} &= \left\{ \frac{0,08^{0,05}}{P_1}, \frac{0,23^{0,05}}{P_2}, \frac{0,48^{0,05}}{P_3}, \frac{0,21^{0,05}}{P_4} \right\} = \left\{ \frac{0,894}{P_1}, \frac{0,936}{P_2}, \frac{0,969}{P_3}, \frac{0,933}{P_4} \right\}, \\ \tilde{G}_5^{\alpha_5} &= \left\{ \frac{0,08^{0,13}}{P_1}, \frac{0,21^{0,13}}{P_2}, \frac{0,23^{0,13}}{P_3}, \frac{0,48^{0,13}}{P_4} \right\} = \left\{ \frac{0,717}{P_1}, \frac{0,813}{P_2}, \frac{0,823}{P_3}, \frac{0,909}{P_4} \right\}, \\ \tilde{G}_6^{\alpha_6} &= \left\{ \frac{0,06^{0,07}}{P_1}, \frac{0,4^{0,07}}{P_2}, \frac{0,14^{0,07}}{P_3}, \frac{0,4^{0,07}}{P_4} \right\} = \left\{ \frac{0,813}{P_1}, \frac{0,938}{P_2}, \frac{0,871}{P_3}, \frac{0,938}{P_4} \right\} \end{aligned}$$

Полученные нечеткие множества показаны на рис.5

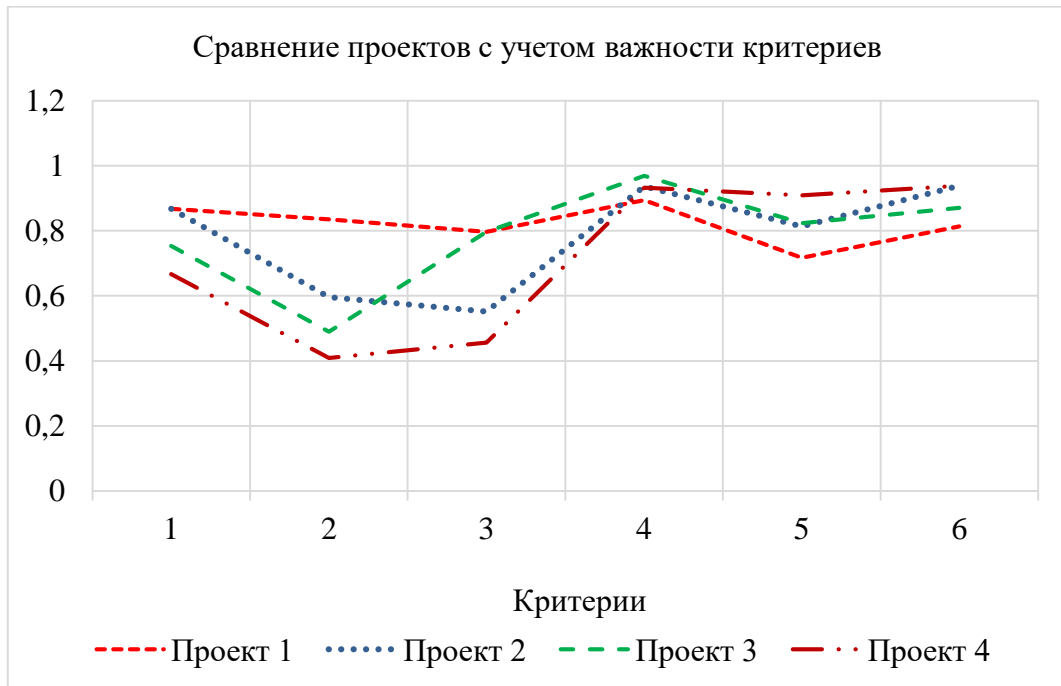


Рис.5

Найдем по формуле (3) пересечение данных множеств, получим:

$$\tilde{D} = \left\{ \frac{0,717}{P_1}, \frac{0,552}{P_2}, \frac{0,49}{P_3}, \frac{0,409}{P_4} \right\}.$$

Таким образом лучше других одновременно удовлетворяет всем критериям (с учетом важности критериев) проект P_1 .

Постановка задачи линейного программирования (ЛП)

Задача ЛП в *стандартной форме* – максимизировать линейную целевую функцию при линейных ограничениях:

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Например, пусть b_i – количество ресурса i -го типа, используемого в процессе производства n видов продукции; a_{ij} – количество ресурса i -го типа, необходимого для производства единицы продукции j -го вида; c_j – стоимость единицы продукции j -го вида; x_j – количество выпускаемой (планируемой) продукции j -вида; $A = (a_{ij})_{m \times n}$ – технологическая матрица; $x = (x_j)_{1 \times n}$ – план производства; Z – стоимость выпущенной продукции. В этом случае задача ЛП (1) состоит в нахождении плана производства, максимизирующего стоимость выпущенной продукции при заданных ограничениях на ресурсы.

Допустимым решением задачи называется любой вектор x , удовлетворяющий ограничениям задачи (1).

Стоимостью решения x называется значение целевой функции $Z(x)$ на этом решении.

Оптимальным решением называется допустимое решение, если оно реализует максимум целевой функции на множестве всех допустимых решений:

$$Z(x^*) = \max_{x \in X} Z(x).$$

Задача ЛП в *канонической форме* имеет следующий вид:

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Задача ЛП в *общей форме* имеет следующий вид:

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, k < m;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = k + 1, \dots, m, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, s < n.$$

При этом переменные x_j , на которые не наложено условие неотрицательности, называются *свободными*.

Задачу (1) можно записать в форме (2), введя *слабые* переменные (переменные *недостатка*) $x_{n+i}, i = 1, \dots, m$, получим

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n + m.$$

Говорят, что задача (4) имеет *диагональную* форму относительно переменных x_{n+1}, \dots, x_{n+m} .

Базисные и реберные решения.

Решение $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, удовлетворяющее ограничениям задачи (2) называется *базисным*, если система столбцов $\{A_j | j \in J(x^0)\}$ матрицы A линейно независима (здесь $J(x) = \{j | x_j \neq 0\}$). Число базисных решений конечно.

Пусть X – множество всех допустимых решений задачи (1). Ограниченное множество X называется *многогранником*.

Решение $x^0 \in X$ называется *крайней точкой (вершиной)* множества X , если не существует различных решений $x', x'' \in X$ и такого числа $\lambda \in (0, 1)$, что решение представимо в виде $x^0 = \lambda x' + (1 - \lambda)x''$, т.е. крайняя точка не может быть внутренней точкой отрезка, соединяющего два допустимые решения.

Решение $x^0 \in X$ – *базисное допустимое решение (БДР)* \Leftrightarrow оно является крайней точкой множества X .

Базис – система $\{A_j | j \in J\}$, состоящая из m линейно-независимых столбцов, где J – множество базисных номеров (*МБН*).

Если задача ЛП задана в диагональной форме (4), то (AI_m) – матрица системы уравнений, образующих основные ограничения.

Решение x^0 , удовлетворяющее ограничениям задачи (2), называется *реберным*, если $|J(x^0)| = r$ (случай базисного решения) либо $|J(x^0)| = r + 1$, где r – ранг системы $\{A_j | j \in J(x^0)\}$.

Ребром множества X называется совокупность допустимых реберных решений $x(t)$, построенных по следующему правилу: $x(t) = x^0 + tx'$, где x^0 – допустимое реберное, но не базисное решение; t – параметр; $x_j(t) \geq 0, j \in J(x^0)$.

Если решение $x(t^0)$ – крайняя точка ребра, тогда оно является БДР.

Симплекс-метод поиска оптимального решения задачи ЛП.

Рассмотрим задачу ЛП в диагональной форме (4). Множество всех допустимых решений задачи (4) обозначим через \bar{X} . Основной шаг симплекс-метода состоит в перемещении по ребру множества \bar{X} от одного БДР к другому, целевая функция при этом возрастает.

Пример 1.

Найти решение задачи ЛП, записанной в стандартной форме:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 32, \quad 0 \leq x_1 \leq 5, \quad 0 \leq x_2 \leq 8.$$

Запишем задачу в диагональной форме:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_3 = 5; \quad x_2 + x_4 = 8;$$

$$4x_1 + 3x_2 + x_5 = 32, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5.$$

Матрица ограничений имеет вид

$$(AI_m) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 32 \end{array} \right).$$

Шаг 1. Базисные переменные x_3, x_4, x_5 . Т.к. все $b_i \geq 0, i = 1, \dots, m$, в качестве начального базисного решения возьмем решение, в котором все *небазисные переменные*, равны нулю, т.е. $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 5, x_4 = 8, x_5 = 32$ или $x^{(1)} = (0, 0, 5, 8, 32)$.

Этому решению соответствует МБН $J^{(1)} = \{3, 4, 5\}$.

Шаг 2. Пусть $x_2 = t$ ($p = 2$), будем увеличивать эту компоненту. Получим реберное решение $\tilde{x} = (0, t, 5, 8 - t, 32 - 3t)$. Это решение является допустимым, если $t \geq 0, 8 - t \geq 0, 32 - 3t \geq 0$. Решая данную систему неравенств, получаем $t \geq 0, t \leq 8, t \leq 32/3$ или $0 \leq t \leq 8$. При $t = 8$ получаем новое базисное решение $x^{(2)} = (0, 8, 5, 0, 8)$ с МБН $J^{(2)} = \{2, 3, 5\}$.

Шаг 3. Пусть $x_1 = t$ ($p = 1$), будем увеличивать эту компоненту. Получим реберное решение $\tilde{x} = (t, 8, 5 - t, 0, 8 - 4t)$. Это решение является допустимым, если $t \geq 0, 5 - t \geq 0, 8 - 4t \geq 0$. Решая данную систему неравенств, получаем $t \geq 0, t \leq 5, t \leq 2$ или $0 \leq t \leq 2$. При $t = 2$ получаем новое базисное решение $x^{(3)} = (2, 8, 3, 0, 0)$ с МБН $J^{(2)} = \{1, 2, 3\}$.

Алгоритм останавливает работу на этом шаге, т.к. коэффициенты целевой функции при небазисных переменных x_4, x_5 не положительны, а именно: $c_4 = 0, c_5 = 0$. Решение $x^{(3)} = (2, 8, 3, 0, 0)$ является оптимальным. Значение целевой функции на нем равно $Z = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 8 = 28$.

Алгоритм может остановить свою работу так же в том случае, если

$$a_{ip} \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad c_p > 0.$$

В этом случае неограниченно возрастает и оптимального решения не существует.

Все проделанные преобразования задачи (4) можно свести к преобразованию *симплекс-таблицы*.

Начальная симплекс-таблица имеет вид

Z	$-c_1$	$-c_2$	\dots	$-c_{n-1}$	$-c_n$	0	0	\dots	0	0	0
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1n-1}	a_{1n}	1	0	\dots	0	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2n-1}	a_{2n}	0	1	\dots	0	0	b_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
x_{n+m-1}	$a_{m-1 1}$	$a_{m-1 2}$	\dots	$a_{m-1 n-1}$	$a_{m-1 n}$	0	0	\dots	1	0	b_{m-1}

$$x_{n+m} \left| \begin{array}{ccccccccc} a_{m1} & a_{mn} & \dots & a_{mn} & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right| b_m$$

где x_{n+1}, \dots, x_{n+m} – базисные переменные; x_1, \dots, x_n – небазисные переменные; $x^{(1)} = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_n, b_1, \dots, b_m \right)$ – начальное допустимое базисное решение.

В качестве ведущего столбца выбирается столбец в нулевой строке которого находится отрицательное число, p – номер этого столбца.

Вычислим величину $\theta = \min_{i: a_{ip} > 0} \frac{b_i}{a_{ip}} = \frac{b_l}{a_{lp}}$, l – номер ведущей строки.

a_{lp} – ведущий элемент. Используя элементарные преобразования строк с помощью ведущего элемента обнуляем остальные элементы ведущего столбца; переменная x_p становится базисной, а переменная x_{n+l} – небазисной. Выписывается получившаяся симплекс-таблица и базисное решение $x^{(2)}$. Совокупность проделанных преобразований называется операцией замещения.

Если в нулевой строке есть отрицательные элементы, операцию замещения повторяют.

Алгоритм останавливается на m -м шаге, если все элементы нулевой строки неотрицательны – тогда решение $x^{(k)}$ оптимально, либо в столбце с отрицательным элементом нулевой строки все остальные элементы не положительны – тогда задача не имеет оптимального решения.

Следует заметить, что возможно заикливание симплекс-алгоритма (если на некотором шаге величина $\theta = 0$). Преодолеть заикливание можно с помощью правила Блэнда:

для текущей симплекс-таблицы

Z	$-c'_1$...	$-c'_{n+m}$	0
$x_{B(1)}$	a'_{11}	...	a'_{1n+m}	b'_1
$x_{B(2)}$	a'_{21}	...	a'_{2n+m}	b'_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$x_{B(m)}$	a'_{m1}	...	a'_{mn+m}	b'_m

номер p ведущего столбца выбирается по формуле $p = \min\{j \mid -c'_j < 0\}$, а номер l ведущей строки – из условия

$$B(l) = \min_{k \in I} B(k), \text{ где } I = \text{Arg} \min_{i: a'_{ip} > 0} \frac{b'_i}{a'_{ip}}.$$

В примере 1 начальная симплекс-таблица такова:

Z	-2	-3	0	0	0	0
x_3	1	0	1	0	0	5
x_4	0	1	0	1	0	8
x_5	4	3	0	0	1	32

где x_3, x_4, x_5 – базисные переменные; x_1, x_2 – небазисные переменные; $x^{(1)} = (0, 0, 5, 8, 32)$ – начальное допустимое базисное решение (ДБР).

В нулевой строке элементы первых двух столбцов (-2 и -3) отрицательны – любой из этих столбцов может быть ведущим. Учитывая, что целевая функция по переменной x_2 возрастает быстрее ($3 > 2$), выберем ведущим второй столбец.

Z	-2	-3	0	0	0	0
x_3	1	0	1	0	0	5
x_4	0	1	0	1	0	8
x_5	4	3	0	0	1	32

Вычислим величину $\theta = \min[8/1, 32/3] = 8$. Следовательно, вторая строка является ведущей. Ведущий элемент симплекс-таблицы выделим подчеркиванием.

Z	-2	-3	0	0	0	0
x_3	1	0	1	0	0	5
x_4	0	<u>1</u>	0	1	0	8
x_5	4	3	0	0	1	32

Обнулیم ведущий столбец с помощью ведущего элемента: к нулевой строке прибавим вторую, умноженную на 3; к третьей строке прибавим вторую, умноженную на -3 . Получим

Z	-2	0	0	3	0	24
x_3	1	0	1	0	0	5
x_2	0	1	0	1	0	8
x_5	4	0	0	-3	1	8

Базисное решение $x^{(2)} = (0, 8, 5, 0, 8)$.

В нулевой строке единственный отрицательный элемент (-2) и первый столбец становится ведущим.

Z	-2	0	0	3	0	24
x_3	1	0	1	0	0	5
x_2	0	1	0	1	0	8
x_5	4	0	0	-3	1	8

Вычислим величину $\theta = \min[5/1, 8/4] = 2$. Следовательно, третья строка является ведущей.

Ведущий элемент симплекс-таблицы выделим подчеркиванием.

Z	-2	0	0	3	0	24
x_3	1	0	1	0	0	5
x_2	0	1	0	1	0	8
x_5	<u>4</u>	0	0	-3	1	8

Обнулیم ведущий столбец с помощью ведущего элемента: к нулевой строке прибавим третью, умноженную на $1/2$; к первой строке прибавим третью, умноженную на $-1/4$, после чего разделим элементы ведущей строки на ведущий элемент (т.е. на 4). Получим

Z	0	0	0	3/2	1/2	28
x_3	0	0	1	3/4	-1/4	3
x_2	0	1	0	1	0	8
x_1	1	0	0	-3/4	1/4	2

Базисное решение $x^{(3)} = (2, 8, 3, 0, 0)$ – это оптимальное решение задачи (4), т.к. нулевая строка симплекс-таблицы содержит только неотрицательные элементы. Оптимальное решение исходной задачи (1) $x^* = (2, 8)$ и $Z_{max} = 28$.

Метод искусственного базиса

Задача ЛП:

$$\begin{aligned}
 Z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \\
 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} &= b_i, \quad i = 1, \dots, k, \\
 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, \quad i = k+1, \dots, m, \\
 x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n+k.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Эта задача отличается от задачи (4) тем, что в равенствах начиная с $(k+1)$ -го отсутствуют слабые переменные.

Введем искусственные переменные s_{n+i} , $i = k+1, \dots, m$ и рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{aligned}
 U &= - \sum_{i=k+1}^m s_{n+i} \rightarrow \max, \\
 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} &= b_i, \quad i = 1, \dots, k, \\
 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + s_{n+i} &= b_i, \quad i = k+1, \dots, m, \\
 x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n+k, \quad s_{n+i} \geq 0, \quad i = k+1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть X_2 – множество допустимых решений

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n+k}, s_{n+k+1}, \dots, s_{n+m})$$

задачи (6). Тогда решения из множества

$$X_1 = \{\bar{x} \in X_2 \mid s_{n+i} = 0, i = k+1, \dots, m\}$$

Соответствуют множеству допустимых решений задачи (5).

Если хотя бы одна из искусственных переменных $s_{n+i}^0 > 0$, то множество X_1 пусто. Если $s_{n+i}^0 = 0, i = k + 1, \dots, m$, то $(x_1^0, \dots, x_{n+k}^0)$ - БДР задачи (5), можно продолжить симплекс-алгоритм для задачи (5), при этом столбцы, отвечающие искусственным переменным из таблицы вычеркиваются.

Пример 2.

Найти решение задачи ЛП

$$Z = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 \leq 2, \quad -x_1 + x_2 = 2, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Введем слабую переменную x_3 , получим

$$Z = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2, \quad -x_1 + x_2 = 2, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Введем искусственную переменную s_4 , получим вспомогательную задачу

$$U = -s_4 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2, \quad -x_1 + x_2 + s_4 = 2, \quad x_1, x_2, x_3, s_4 \geq 0.$$

Решаем эту задачу симплекс-методом.

U	0	0	0	1	0
Z	-3	-1	0	0	0
x_3	1	1	1	0	2
s_4	-1	1	0	1	2

Для начального базисного решения $x^{(1)} = (0, 0, 2, 2)$ в нулевой строке нет отрицательных элементов. Преобразуем ее: вычтем из нее последнюю строку, получим

U	1	-1	0	0	-2
Z	-3	-1	0	0	0
x_3	1	1	1	0	2
s_4	-1	1	0	1	2

Далее решаем по симплекс-алгоритму.

U	1	-1	0	0	-2
Z	-3	-1	0	0	0
x_3	1	<u>1</u>	1	0	2
s_4	-1	1	0	1	2

U	2	0	1	0	0
-----	---	---	---	---	---

Z	-2	0	1	0	2
x_2	1	1	1	0	2
s_4	-2	0	<u>-1</u>	1	0

Оптимальное решение задачи (6) $x^0 = (0, 2, 0, 0)$. Т.к. $s_4 = 0$, то базисное решение вырожденное; обнулим третий столбец с помощью ведущего элемента, вычеркнем строку, соответствующую U , и столбец, соответствующий s_4 .

Получим

Z	-4	0	0	2
x_2	-1	1	0	2
x_3	<u>2</u>	0	1	0

Z	0	0	2	2
x_2	0	1	1/2	2
x_1	1	0	1/2	0

Оптимальное решение исходной задачи: $x^* = (0, 2)$.

Метод замещений.

Пусть в задаче (2) имеется коэффициент $b_s < 0$.

Если элементы i -й строки симплекс-таблицы неотрицательны, то допустимого решения задачи (2) не существует.

Если существует $a_{sp} < 0$, то s -й столбец небазисный. Выберем i -ю строку из условия

$$\bar{\theta} = \min_{i \in I(p)} \frac{b_i}{a_{ip}} = \frac{b_l}{a_{lp}},$$

где $I(p) = \{i \mid a_{ip} < 0, b_i < 0\} \cup \{i \mid a_{ip} > 0, b_i \geq 0\}$.

Элемент a_{lp} выбирается ведущим и выполняется операция замещения.

Алгоритм заканчивает свою работу, когда все элементы последнего столбца симплекс-таблицы становятся неотрицательными.

При $\bar{\theta} = 0$ возможно закливание алгоритма. Для его преодоления можно использовать правило Блэнда.

Пример 3.

Для следующих ограничений задачи ЛП

$$-2x_1 + x_2 - x_3 = -2, \quad -x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

определить начальное БДР.

Запишем матрицу системы

	-2	1	-1	-2
	-1	-1	2	3

Приведем матрицу к диагональному виду относительно переменных x_2 и x_3 с помощью элементарных преобразований строк.

Прибавим первую строку ко второй, получим

	-2	1	-1	-2
	-3	0	1	1

Затем прибавим к первой строке вторую, получим

x_2	-5	1	0	-1
x_3	-3	0	1	1

В первой строке коэффициент $b_1 = -1 < 0$ и $a_{11} = -5 < 0$ – ведущий элемент

x_2	<u>-5</u>	1	0	-1
x_3	-3	0	1	1

Выполним операцию замещения: прибавим ко второй строке первую, умноженную на $-3/5$; разделим элементы первой строки на -5 , получим

x_1	1	$-1/5$	0	$1/5$
x_3	0	$-3/5$	1	$8/5$

Начальное БДР $x^{(1)} = (1/5, 0, 8/5)$.

Постановка транспортной задачи

Транспортная компания осуществляет перевозки некоторого продукта из пунктов производства в пункты потребления. Имеется m пунктов производства продукта. В i -м пункте продукт выпускается в количестве $s_i, i = 1, \dots, m$ (если продукт штучный, то величины s_i – целые). Имеется n пунктов потребления продукта с потребностями $d_j, j = 1, \dots, n$. Выполнено условие баланса:

$$\sum_{i=1}^m s_i = \sum_{j=1}^n d_j.$$

Стоимость перевозки единицы продукции из i -го пункта производства в j -й пункт потребления равна c_{ij} (обычно стоимость перевозки пропорциональна расстоянию между пунктами).

План перевозок задается матрицей $x = (x_{ij})_{m \times n}$, где x_{ij} – количество продукта перевозимого из i -го пункта в j -й пункт.

Стандартная *транспортная задача* состоит в минимизации стоимости перевозок:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Пример 4.

Транспортная задача задана таблицей

Пункты производства, i	Пункты потребления, j				Выпуск товара s_i
	1	2	3	4	
1	5	7	6	4	5
2	3	4	3	2	2
3	4	3	6	5	3
Потребность d_j	7	1	1	1	

В выделенных цветом клетках указана стоимость перевозок.

Проверим баланс: $7+1+1+1=10$ и $5+2+3=10$, т.е. условие баланса выполнено.

Если условие баланса нарушено – наблюдается дефицит продукта, т.е.

$$\sum_{i=1}^m s_i < \sum_{j=1}^n d_j,$$

можно минимизировать стоимость перевозок, но некоторые пункты потребления получают продукт не полностью; чтобы свести задачу к стандартной вводят $(m + 1)$ -й фиктивный пункт производства с величиной выпуска

$$s_{m+1} = \sum_{j=1}^n d_j - \sum_{i=1}^m s_i,$$

при этом полагают $c_{m+1 j} = 0, j = 1, \dots, n$ и рассматривают задачу (7) с $(m + 1)$ пунктами производства.

Если же имеется избыток продукта, т.е.

$$\sum_{i=1}^m s_i > \sum_{j=1}^n d_j,$$

то для сведения задачи к стандартной форме (1) вводят $(n + 1)$ -й фиктивный пункт потребления и полагают

$$d_{n+1} = \sum_{i=1}^m s_i - \sum_{j=1}^n d_j, \quad c_{i n+1} = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Многие задачи ЛП формулируются как транспортные задачи, например, задача о назначении и задача о графике поставок.

Задача о назначении. Завод имеет n цехов и закупил m станков $m \leq n$. В каждом цехе можно установить не более одного станка. Пусть c_{ij} – стоимость установки i -го станка в j -м цехе. Требуется разместить станки по цехам с наименьшими затратами по их установке.

Задача о графике поставок. Фирма должна осуществить поставку изделий в течение n месяцев в количестве d_1, \dots, d_n штук. В i -м месяце фирма может произвести s_i изделий, причем

$$\sum_{i=1}^j s_i > \sum_{i=1}^j d_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Обозначим через x_{ij} количество изделий, произведенных фирмой в i -м месяце для поставки в j -м месяце ($j \geq i$). Пусть c_{ij} – стоимость таких изделий с учетом возможной платы за хранение. При $j < i$ полагаем $c_{ij} = M$, где M – достаточно большое положительное число. Получим транспортную задачу с избытком товара.

Построение начального БДР методом «северо-западного угла»

Рассмотрим транспортную задачу, приведенную в **примере 4**.

Пункты производства, i	Пункты потребления, j				Выпуск товара s_i
	1	2	3	4	
1	5	7	6	4	5
2	3	4	3	2	2
3	4	3	6	5	3
Потребность d_j	7	1	1	1	

Построим начальное БДР – будем последовательно двигаться при выборе очередной компоненты начального БДР с «северо-запада» на «юго-восток».

Шаг 1. Берем $i_1 = 1, j_1 = 1$. Первая компонента начального БДР равна $x_{i_1 j_1}^{(1)} = \min[s_{i_1}, d_{j_1}]$, т.е. $x_{11}^{(1)} = \min[s_1, d_1] = \min[5, 7] = 5 = s_1$. Вычеркиваем $i_1 = 1$ -ю строку и переопределяем величину $d_{j_1} = d_{j_1} - s_{i_1}$, т.е. $d_1 = 2$.

Пункты производства, i	Пункты потребления, j				Выпуск товара s_i
	1	2	3	4	
1	5	7	6	4	5

2	3	4	3	2	2
3	4	3	6	5	3
Потребность d_j	7 2	1	1	1	

В получившейся матрице вновь берем элемент в «северо-западном углу», т.е. $i_2 = 2, j_2 = 1$. Компонента начального БДР равна $x_{i_2 j_2}^{(1)} = \min[s_{i_2}, d_{j_2}]$, т.е. $x_{21}^{(1)} = \min[s_2, d_1] = \min[2, 2] = 2$. Т.к. получили, что $s_{i_2} = d_{j_2}$, то необходимо вычеркнуть либо i_2 -ю строку, либо j_2 -й столбец. Например, вычеркиваем $j_2 = 1$ -й столбец и переопределяем величину $s_{i_2} = s_{i_2} - d_{j_2}$, т.е. $s_2 = 0$.

Пункты производства, i	Пункты потребления, j				Выпуск товара s_i
	1	2	3	4	
1	5	7	6	4	5
2	3	4	3	2	2 0
3	4	3	6	5	3
Потребность d_j	7 2	1	1	1	

Берем $i_3 = 2, j_3 = 2$. Тогда $x_{i_3 j_3}^{(1)} = \min[s_{i_3}, d_{j_3}]$, т.е. $x_{22}^{(1)} = \min[s_2, d_2] = \min[0, 1] = 0 = s_2$. Вычеркиваем $i_3 = 2$ -ю строку и переопределяем величину $d_{j_3} = d_{j_3} - s_{i_3}$, т.е. $d_2 = 1$.

Пункты производства, i	Пункты потребления, j				Выпуск товара s_i
	1	2	3	4	
1	5	7	6	4	5
2	3	4	3	2	0
3	4	3	6	5	3
Потребность d_j	7 2	1	1	1	

Берем $i_4 = 3, j_4 = 2$. Тогда $x_{i_4 j_4}^{(1)} = x_{32}^{(1)} = \min[s_3, d_2] = \min[3, 1] = 1 = d_2$. Вычеркиваем $j_4 = 2$ -й столбец и переопределяем величину $s_{i_4} = s_{i_4} - d_{j_4}$, т.е. $s_3 = 3 - 1 = 2$.

Пункты производства, i	Пункты потребления, j				Выпуск товара s_i
	1	2	3	4	
1	5	7	6	4	5
2	3	4	3	2	0
3	4	3	6	5	3 2

Потребность d_j	7 2	4	1	1
----------------------	--------	---	---	---

Берем $i_5 = 3, j_5 = 3$. Тогда $x_{i_5 j_5}^{(1)} = x_{33}^{(1)} = \min[s_3, d_3] = \min[2, 1] = 1 = d_3$. Вычеркиваем $j_5 = 3$ -й столбец и переопределяем величину $s_{i_5} = s_{i_5} - d_{j_5}$, т.е. $s_3 = 2 - 1 = 1$.

Пункты производства, i	Пункты потребления, j				Выпуск товара s_i
	1	2	3	4	
1	5	7	6	4	5
2	3	4	3	2	2
3	4	3	6	5	3
Потребность d_j	7 2	4	1	1	2

Берем $i_6 = 3, j_6 = 4$. Тогда $x_{i_6 j_6}^{(1)} = x_{34}^{(1)} = \min[s_3, d_4] = \min[2, 1] = 1 = d_4$. Вычеркиваем $j_6 = 4$ -й столбец – последний столбец матрицы стоимостей. Все оставшиеся компоненты решения $x^{(1)}$ полагаем равными нулю. Получаем начальное решение

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, Z(x^{(1)}) = 45.$$

Построение начального БДР методом минимального элемента

Рассмотрим на примере транспортной задачи из **примера 4**.

Пункты производства, i	Пункты потребления, j				Выпуск товара s_i
	1	2	3	4	
1	5	7	6	4	5
2	3	4	3	2	2
3	4	3	6	5	3
Потребность d_j	7	1	1	1	

Выберем минимальный элемент матрицы стоимости – здесь это $c_{24} = 2$, т.е. $i_1 = 2, j_1 = 4$. Тогда $x_{24}^{(1)} = \min[s_2, d_4] = \min[2, 1] = 1 = d_4$. Вычеркиваем $j_1 = 4$ -й столбец и переопределяем величину $s_2 = s_2 - d_4 = 1$.

Пункты производства, i	Пункты потребления, j				Выпуск товара s_i
	1	2	3	4	
1	5	7	6	4	5
2	3	4	3	2	1
3	4	3	6	5	3

Потребность d_j	7	1	1	4
----------------------	---	---	---	---

Выберем минимальный элемент получившейся матрицы стоимости $c_{21} = 3$, т.е. $i_2 = 2, j_2 = 1$. Тогда $x_{21}^{(1)} = \min[s_2, d_1] = \min[1, 7] = 1 = s_2$. Вычеркиваем $i_2 = 2$ -ю строку и переопределяем величину $d_{j_2} = d_1 - s_2 = 6$.

Пункты производства, i	Пункты потребления, j				Выпуск товара s_i
	1	2	3	4	
1	5	7	6	4	5
2	3	4	3	2	1
3	4	3	6	5	3
Потребность d_j	7 6	1	1	4	

Выберем минимальный элемент $c_{32} = 3$, т.е. $i_3 = 3, j_3 = 2$. Тогда $x_{32}^{(1)} = \min[s_3, d_2] = \min[3, 1] = 1 = d_2$. Вычеркиваем $j_3 = 2$ -й столбец и переопределяем величину $s_3 = s_3 - d_2 = 2$.

Пункты производства, i	Пункты потребления, j				Выпуск товара s_i
	1	2	3	4	
1	5	7	6	4	5
2	3	4	3	2	1
3	4	3	6	5	3 2
Потребность d_j	7 6	1	1	4	

Выберем минимальный элемент $c_{31} = 4$, т.е. $i_4 = 3, j_4 = 1$. Тогда $x_{31}^{(1)} = \min[s_3, d_1] = \min[2, 6] = 2 = s_3$. Вычеркиваем $i_4 = 3$ -ю строку и переопределяем величину $d_1 = d_1 - s_3 = 4$.

Пункты производства, i	Пункты потребления, j				Выпуск товара s_i
	1	2	3	4	
1	5	7	6	4	5
2	3	4	3	2	1
3	4	3	6	5	3 2

Потребность d_j	7 6 4	4	1	4
----------------------	-------------	---	---	---

Выберем минимальный элемент $c_{11} = 5$, т.е. $i_5 = 1, j_5 = 1$. Тогда $x_{11}^{(1)} = \min[s_1, d_1] = \min[5, 4] = 4 = d_1$. Вычеркиваем $j_5 = 1$ -й столбец и перепределяем величину $s_1 = s_1 - d_1 = 1$.

Пункты про- изводства, i	Пункты потребления, j				Выпуск то- вара s_i
	1	2	3	4	
1	5	7	6	4	5 1
2	3	4	3	2	2 4
3	4	3	6	5	3 2
Потребность d_j	7 6 4	4	1	4	

Выберем минимальный элемент $c_{13} = 6$, т.е. $i_6 = 1, j_6 = 3$. Тогда $x_{13}^{(1)} = \min[s_1, d_3] = \min[1, 1] = 1$. Вычеркиваем последний столбец матрицы стоимостей. Все оставшиеся компоненты решения $x^{(1)}$ полагаем равными нулю. Получаем начальное решение

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Z(x^{(1)}) = 42.$$

Решение транспортной задачи методом потенциалов

Задачу (1) можно записать как задачу максимизации функции

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (-c_{ij}) x_{ij} \rightarrow \max \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

и решать ее симплекс-методом.

Начнем с начального БДР $x^{(1)}$. Начальная симплекс-матрица имеет вид

Z	c_{ij}	0
$x_{j^{(1)}}$	A	b

где $J^{(1)}$ – множество базисных пар решения $x^{(1)}$.

Для базисных пар $(i_t, j_t) \in J^{(1)}$ составим систему уравнений

$$u_{i_t} + v_{j_t} = c_{i_t j_t}, t = 1, \dots, n + m - 1. \quad (9)$$

Найдем решение данной системы, полагая $u_{\tilde{i}} = 0$, где (\tilde{i}, \tilde{j}) – базисная пара, имеющая наименьшую стоимость. При этом $v_j = c_{\tilde{i}j}$.

БДР оптимально, если для всех небазисных пар справедливо неравенство

$$c_{ij} - u_i - v_j \geq 0.$$

Если найдется пара (i, j) , для которой $c_{ij} - u_i - v_j < 0$, то можно ввести в базис переменную x_{ij} . Необходимо определить переменную, которая выводится из базиса. Для этого рассмотрим цикл (он единственный), соединяющий небазисную пару (i, j) с базисными парами

$$(i, j)R_1(i, j_1)R_2(i_k, j_1) \dots R_1(i_r, j)R_2(i, j),$$

где R_1, R_2 – бинарные отношения на множестве пар (i, j) :

$$(i, j)R_1(i', j') \Leftrightarrow i = i'; (i, j)R_2(i', j') \Leftrightarrow j = j'.$$

Чтобы построить новое базисное решение $x^{(2)}$, будем увеличивать компоненту $x_{ij} \geq 0$ до величины $\min x_{i_t j_t}^{(1)}$, где минимум берется по базисным парам цикла, стоящих на четных местах. Для нового множества базисных пар $J^{(2)}$ составляется система (9) и проверяется условие оптимальности и т.д.

Решим **пример 4** методом потенциалов.

Матрица стоимостей имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Выберем начальное БДР, найденное методом минимального элемента

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базисные компоненты выделены жирным текстом.

Сведем информацию о стоимости и базисных компонентах в одну таблицу

i	j				s_i	
	1	2	3	4		
1	4	5	7	6	4	5
2	1	3	4	3	2	2
3	2	4	3	6	5	3
d_j	7	1	1	1		

В центрах клеток указаны базисные компоненты начального БДР, в верхних правых углах – стоимость. Базисным компонентам отвечает система уравнений

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 5; u_1 + v_3 = 6; \\ u_2 + v_1 = 3; u_2 + v_4 = 2; u_2 = 0; \\ u_3 + v_1 = 4; u_3 + v_2 = 3. \end{cases}$$

Найдем решение системы

$$u_1 = 2; u_2 = 0; u_3 = 1; v_1 = 3; v_2 = 2; v_3 = 4; v_4 = 2.$$

Запишем в виде таблицы, где решения системы указаны слева и сверху от таблицы, а значения $c_{ij} - u_i - v_j$ для небазисных пар указаны в нижних левых углах.

u_i	v_j				s_i
	3	2	4	2	
2	5	7	6	4	5
0	3	4	3	2	2
1	4	3	6	5	3
d_j	7	1	1	1	

Additional values from the image: $c_{23} - u_2 - v_3 = -1$ (yellow cell), $c_{21} - u_2 - v_1 = 4$ (red dashed arrow), $c_{13} - u_1 - v_3 = 1$ (red dashed arrow), $c_{11} - u_1 - v_1 = 1$ (cyan cell), $c_{22} - u_2 - v_2 = 0$ (cyan cell), $c_{32} - u_3 - v_2 = 1$ (cyan cell).

Условие оптимальности не выполнено для пары (2, 3):

$$c_{23} - u_2 - v_3 = -1 < 0.$$

Найдем цикл, соединяющий пару (2, 3) с базисными парами (красный пунктирный контур в таблице):

$$(2, 3)R_1(2, 1)R_2(1, 1)R_1(1, 3)R_2(2, 3).$$

На четных местах цикла компоненты решения $x^{(1)}$ равны 1:

$$x_{21} = 1; x_{13} = 1,$$

поэтому x_{23} можно увеличивать до величины, равной 1.

Получим следующую таблицу

u_i	v_j				s_i
	3	2	4	2	
2	5	7	6	4	5
0	0	4	3	2	2
1	4	3	6	5	3

	2	1		
d_j	7	1	1	1

Переменная x_{13} выведена из базиса, а переменная x_{23} введена в него.

Новое БДР $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Составим для него систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 5; u_2 + v_4 = 2; \\ u_2 + v_1 = 3; u_3 + v_1 = 4; u_2 = 0; \\ u_2 + v_3 = 3; u_3 + v_2 = 3. \end{cases}$$

Найдем решение системы

$$u_1 = 2; u_2 = 0; u_3 = 1; v_1 = 3; v_2 = 2; v_3 = 3; v_4 = 2.$$

Запишем в виде таблицы, где решения системы указаны слева и сверху от таблицы, а значения $c_{ij} - u_i - v_j$ для небазисных пар указаны в нижних левых углах.

	v_j				
u_i	3	2	3	2	s_i
2	5	3	1	0	5
0	0	2	1	1	2
1	2	1	2	2	3
d_j	7	1	1	1	

Условие оптимальности выполнено: для всех небазисных пар справедливо неравенство $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$, следовательно $x^{(2)}$ – оптимальное решение задачи стоимости, $Z(x^{(2)}) = 41$.

Сетевые задачи: задача о кратчайшем пути; сетевое планирование

Задача о кратчайшем пути

Совокупность непустого множества вершин (узлов) $V = \{1, \dots, n\}$ и множества E упорядоченных пар (i, j) различных вершин называется *ориентированным графом*.

Упорядоченная пара $(i, j) \in E$ называется *дугой* или *ориентированным ребром*.

Ориентированный граф, каждой дуге $(i, j) \in E$ которого поставлено в соответствие неотрицательное число b_{ij} , называется *сетью*. Числа b_{ij} могут выражать длину, время, пропускную способность и т.п.

Будем рассматривать сети, в которых вершина 1 – *начальная*, вершина n – *конечная*, остальные вершины – *промежуточные*.

Говорят, что вершина i *предшествует* вершине j , а вершина j *следует* за вершиной i , если $(i, j) \in E$.

Множество вершин, предшествующих вершине i , обозначим $P(i)$:

$$P(i) = \{k \in V \mid (k, i) \in E\}.$$

Множество вершин, следующих за вершиной i , обозначим $D(i)$:

$$D(i) = \{j \in V \mid (i, j) \in E\}.$$

Путем, ведущим из вершины i_1 в вершину i_2 , называется чередующаяся последовательность вершин и дуг сети вида

$$i_1, (i_1, i_2), i_2, (i_2, i_3), i_3, \dots, (i_{k-2}, i_{k-1}), i_{k-1}, (i_{k-1}, i_k), i_k,$$

в которой все вершины различны.

Коротко будем обозначать путь так: $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \rightarrow \dots \rightarrow i_{k-1} \rightarrow i_k$.

Длина пути $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \rightarrow \dots \rightarrow i_{k-1} \rightarrow i_k$ равна сумме длин составляющих его дуг

$$\sum_{l=1}^{k-1} b_{i_l i_{l+1}}.$$

Последовательность вершин и дуг, в которой все промежуточные вершины различны, а $i_1 = i_k$, называется *циклом*.

В задаче о *кратчайшем пути* требуется найти путь минимальной длины из начальной вершины в конечную.

Алгоритм Дейкстры решения задачи о кратчайшем пути

На каждом шаге алгоритма имеется множество вершин W , содержащее вершину 1. Каждой вершине $j \in V$ сопоставляется метка $\rho(j)$ – длина кратчайшего пути из вершины 1 в вершину j , в котором все промежуточные вершины принадлежат множеству W . Если для некоторой вершины j указанного пути не существует, то $\rho(j) = \infty$.

Алгоритм работает пошагово – на каждом шаге «посещает» одну вершину и пытается уменьшать метки. Работа алгоритма завершается, когда все вершины посещены.

Шаг 1. Полагаем $W = \{1\}$, $\rho(j) = \begin{cases} b_{1j}, & (1, j) \in E; \\ \infty, & (1, j) \notin E. \end{cases}$

Пусть после k шагов имеется некоторое множество W и значения меток $\rho(j)$.

Шаг $k + 1$. Вершина $i \in \text{Arg} \min_{j \notin W} \rho(j)$ добавляется ко множеству W , а для вершин $j \in D(i)$ значения меток пересчитываются по формуле

$$\rho(j) = \min[\rho(j), \rho(i) + b_{ij}].$$

Алгоритм заканчивает работу, когда вершина n будет включена во множество W .

Кратчайший путь из 1 в n длиной $\rho(n)$ восстанавливается следующим образом: находится вершина $k \in P(n)$ из условия $\rho(n) = b_{kn} + \rho(k)$, затем вершина $s \in P(k)$ из условия $\rho(k) = b_{sk} + \rho(s)$ и т.д.

Пример 5.

Найти кратчайший путь из города 1 в город 4 для сети, изображенной на рис.1.

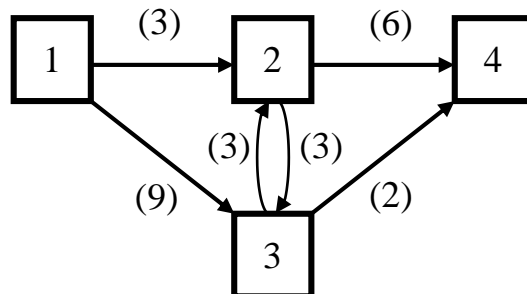


Рисунок 1

Шаги алгоритма проиллюстрированы на рисунке 2. Вершины, принадлежащие множеству W на каждом шаге, выделены цветом. Длины дуг указаны в скобках. Метки $\rho(j)$ расположены над / под вершинами.

На первом шаге $W = \{1\}$, метки $\rho(1) = 0, \rho(2) = 3, \rho(3) = 9, \rho(4) = \infty$.

На втором шаге присоединяем к W вершину 2 (она следует за вершиной 1 и имеет наименьшую метку) – $W = \{1, 2\}$ и пересчитываем метки

$$\rho(3) = \min[\rho(3), \rho(2) + b_{23}] = \min[9, 3 + 3] = 6,$$

$$\rho(4) = \min[\rho(4), \rho(2) + b_{24}] = \min[\infty, 3 + 6] = 9.$$

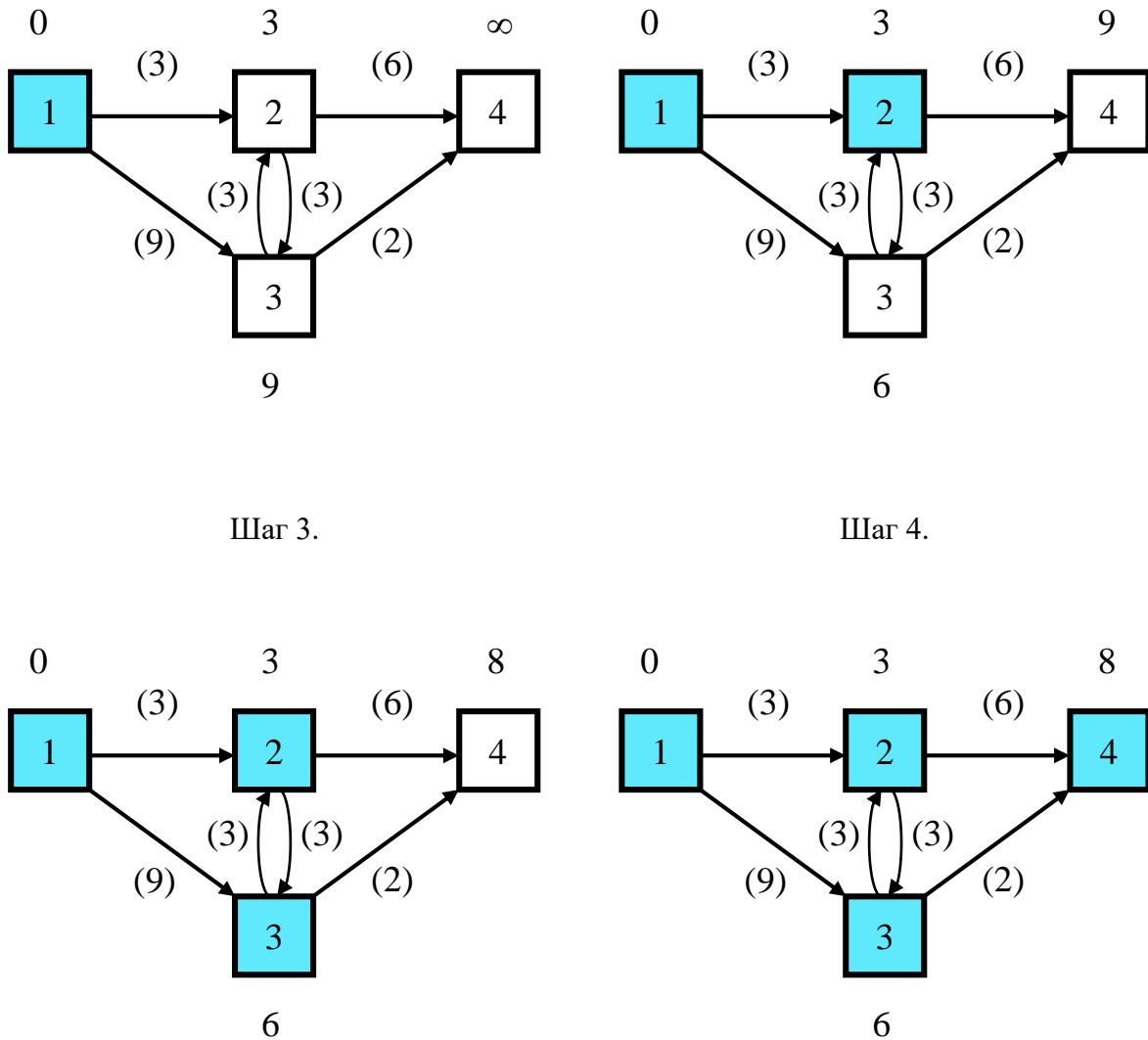
На третьем шаге присоединяем к W вершину 3 (она следует за вершиной 2 и имеет наименьшую метку) – $W = \{1, 2, 3\}$ и пересчитываем метки

$$\rho(4) = \min[\rho(4), \rho(3) + b_{34}] = \min[9, 6 + 2] = 8.$$

На четвертом шаге присоединяем к W вершину 4 (она следует за вершиной 3) – $W = \{1, 2, 3, 4\}$. Алгоритм заканчивает работу.

Шаг 1.

Шаг 2.



Шаг 3.

Шаг 4.

Рисунок 2

Восстановим кратчайший путь:

из условия $\rho(4) = b_{k4} + \rho(k)$ следует, что $k = 3$, т.к. $8 = (2) + 6$;

из условия $\rho(3) = b_{s3} + \rho(s)$ следует, что $s = 2$, т.к. $6 = (3) + 3$;

из условия $\rho(2) = b_{r2} + \rho(r)$ следует, что $r = 1$, т.к. $3 = (3) + 0$.

Кратчайший путь $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$.

Сетевое планирование

Методы *сетевого планирования* используют при организации работ над различными проектами, такими как инвестиционные проекты, комплексные научные исследования и т.п.

Введем основные понятия и определения.

Говорят, что работа k *непосредственно предшествует* работе l , если в момент завершения работы k и, возможно, некоторых других работ может начаться выполнение работы l .

Начальная информация о проекте задается перечнем работ, их продолжительностью и очередностью выполнения (для каждой работы должно быть указано, каким работам она предшествует).

Сетевой график – сеть без циклов со множеством вершин $V = \{1, \dots, n\}$ и множеством дуг E , в котором направление дуги соответствует работам, а вершины – событиям, состоящим в завершении некоторых работ; каждой дуге (i, j) сопоставлена продолжительность ее выполнения t_{ij} .

Сетевой график используют для наглядности представления проекта.

В сетевом графике выделяют начальную вершину 1, соответствующую моменту начала всех работ проекта, и конечную вершину n , соответствующую моменту окончания всех работ проекта. в начальную вершину дуги не могут входить, из конечной – не могут выходить. Другие вершины имеют как входящие, так и выходящие дуги; работы, выходящие из некоторой вершины, не могут начаться раньше, чем завершатся все работы, входящие в эту вершину.

Если некоторые работы выполняются одновременно, то возникает мультиграф – в мультиграфе две вершины могут быть соединены несколькими дугами, а не одной. Чтобы получить обычный ориентированный граф, на каждой дуге вводят событие и фиктивную работу нулевой продолжительности.

Вершинам присваиваются *ранги*. Начальная вершина - вершина ранга 0. Вершинам 1 ранга, предшествуют только вершины нулевого ранга. Вершинам k -го ранга предшествуют только вершины ранга не выше $k - 1$.

Для определения рангов вершин сетевого графика используется модифицированный **алгоритм Дейкстры**, модифицированный для поиска длин максимальных путей из вершины 1 в любую вершину $j \in V$.

Шаг 1. Полагаем $W = \{1\}$, $\rho(j) = \begin{cases} 1, & (1, j) \in E; \\ 0, & (1, j) \notin E. \end{cases}$

Пусть после k шагов имеется некоторое множество W и значения меток $\rho(j)$.

Шаг $k + 1$. Вершина $i \in \text{Arg} \max_{j \notin W} \rho(j)$ добавляется ко множеству W , а для вершин $j \in D(i)$ значения меток пересчитываются по формуле

$$\rho(j) = \max[\rho(j), \rho(i) + b_{ij}].$$

Алгоритм заканчивает работу, когда множество W совпадет со множеством V . Итоговые значения меток $\rho(j)$ определяют ранги вершин.

По окончании работы алгоритма вершины перенумеровывают следующим образом: вершинам 1-го ранга присваивают номера $2, \dots, l$; вершинам 2-го ранга – номера $l + 1, \dots, s$ и т.д.; n – номер конечной вершины. Сетевой график при этом называют *правильно пронумерованным*.

Длиной пути сетевого графика из вершины 1 в вершину j называется сумма продолжительностей составляющих его работ.

Для определения минимального времени t_j осуществления события j , используется **алгоритм Форда** (применяется для правильно пронумерованного сетевого графика).

Для вершин 1-го ранга $t_j = t_{1j}$.

Пусть найдены величины t_i для всех вершин i ранга не выше $k - 1$. Тогда для вершины ранга k имеем

$$t_j = \max_{i \in P(j)} (t_i + t_{ij}).$$

В результате для конечной вершины n находим величину t_n – критическое время проекта.

Путь длиной t_n , ведущий из начальной вершины в конечную, называется критическим путем.

Алгоритм нахождения критического пути: двигаясь из вершины n , найти вершину $s \in P(n)$ из условия $t_n = t_s + t_{sn}$; затем найти вершину $l \in P(s)$ из условия $t_s = t_l + t_{ls}$ и т.д.

Максимальным временем T_i события i называется наибольшее время его осуществления, при котором проект можно выполнить за критическое время t_n .

Алгоритм нахождения T_i :

$$T_n = t_n.$$

Пусть определены числа $T_n, T_{n-1}, \dots, T_{n+1}$, тогда

$$T_i = \min_{j \in D(i)} (T_j - t_{ij}).$$

Величина $T_j - t_i - t_{ij}$ называется полным резервом времени работы (i, j) – максимально возможное увеличение продолжительности работы (i, j) без увеличения продолжительности выполнения всего проекта.

Свободный резерв времени $(t_j - t_i - t_{ij})$ – максимально возможное увеличение продолжительности работы (i, j) , при котором можно начать все работы, выходящие из вершины j в наиболее раннее время.

Независимый резерв времени $\max[0, t_j - T_i - t_{ij}]$ – максимально возможное увеличение продолжительности работы (i, j) , не влияющее на резерв времени других работ.

Пример 6.

В таблице 1. Задана информация о работах, необходимых для создания фирмы.

Таблица 1.

Наименование работы	Непосредственно предшествует работам	Продолжительность выполнения, мес.
1. Подбор акционеров	3, 4	4
2. Поиск помещения	5, 6	5
3. Вносы акционеров	5, 6	3
4. Лицензирование	7	4
5. Регистрация	7	3
6. Оборудование офиса	–	6
7. Наем работников	–	2

Построим сетевой график, начиная с конечной вершины (рис.3-7). В конечную вершину входят работы 6 и 7, т.к. они не предшествуют никаким другим работам.

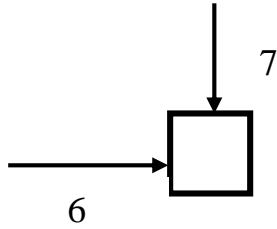


Рисунок 3

Работе 7 предшествуют работы 4 и 5.

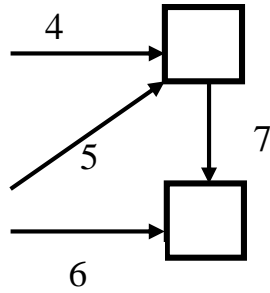


Рисунок 4

Работам 5 и 6 предшествуют работы 2 и 3.

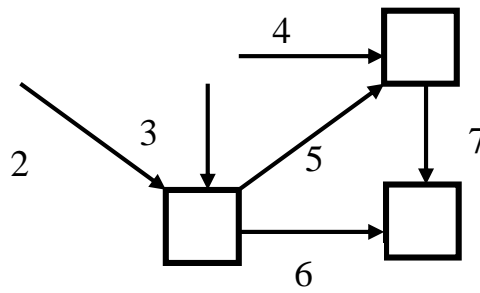


Рисунок 5

Работам 3 и 4 предшествует работа 1.

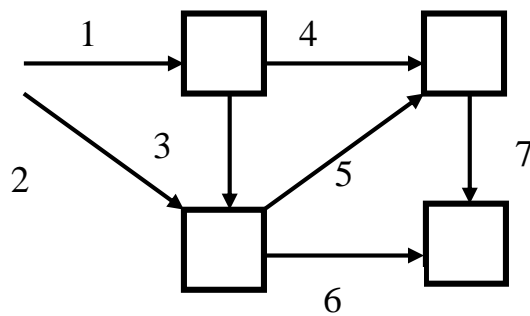


Рисунок 6

Работы 1 и 2 выходят из начальной вершины, т.к. **им не предшествуют** никакие работы.

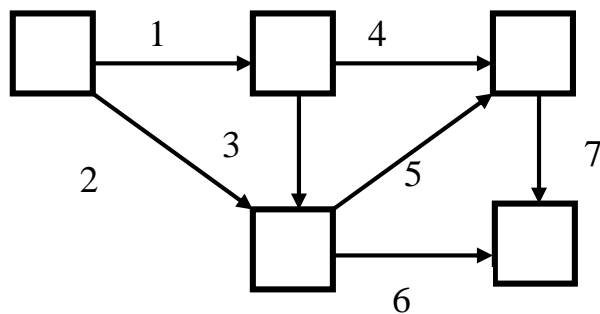


Рисунок 7

Каждой дуге припишем длину 1 и определим ранги вершин в соответствии с алгоритмом Дейкстры (ранги будем записывать рядом с вершинами) – шаги алгоритма показаны на рис.8-12.

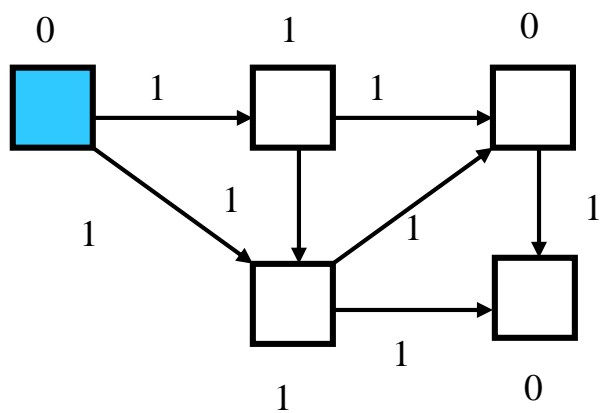


Рисунок 8

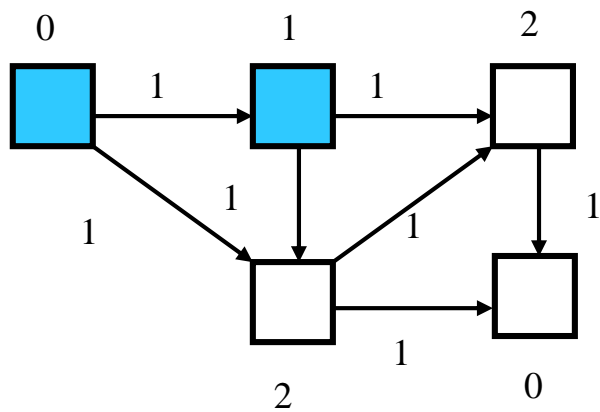


Рисунок 9

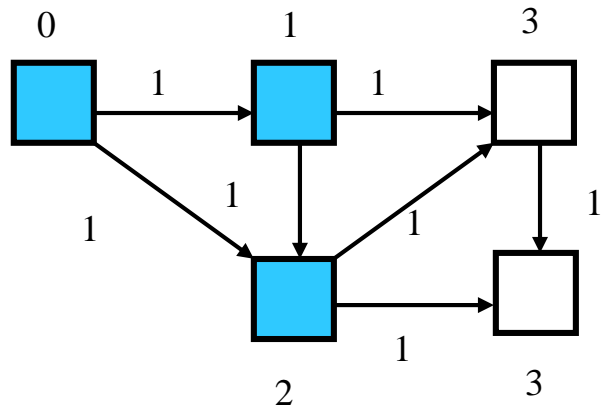


Рисунок 10

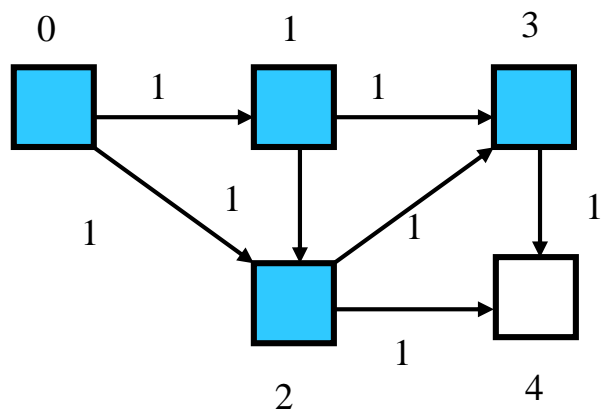


Рисунок 11

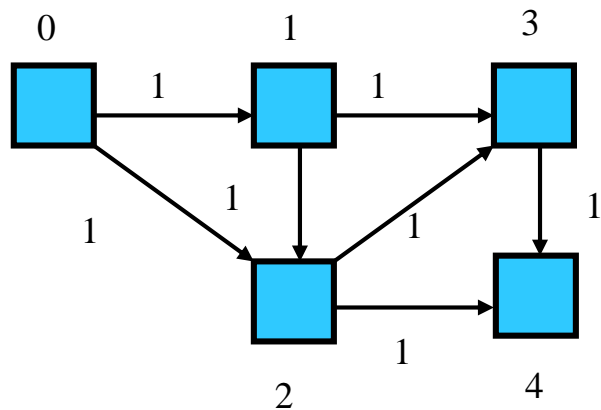


Рисунок 12

Теперь пронумеруем вершины, согласно рангам. На рисунке 13 показан получившийся сетевой график (на дугах указаны номера работ, а в скобках их продолжительность в месяцах).

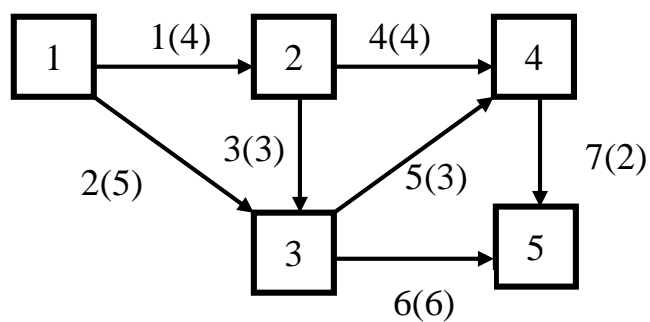


Рисунок 13

Далее найдем все введенные характеристики проекта.

Минимальное время t_j осуществления события j :

$$t_1 = 0; t_2 = 0 + 4 = 4; t_3 = \max[0 + 5; 4 + 3] = 7;$$

$$t_4 = \max[4 + 4; 7 + 3] = 10; t_5 = \max[10 + 2; 7 + 6] = 13.$$

Максимальное время T_j события j :

$$T_5 = t_5 = 13; T_4 = T_5 - t_{45} = 13 - 2 = 11;$$

$$T_3 = \min[T_4 - t_{34}; T_5 - t_{35}] = \min[11 - 3; 13 - 6] = 7;$$

$$T_2 = \min[T_3 - t_{23}; T_4 - t_{24}] = \min[7 - 3; 11 - 4] = 4;$$

$$T_1 = \min[T_2 - t_{12}; T_3 - t_{13}] = \min[4 - 4; 7 - 5] = 0.$$

На рисунке 14 пары t_j, T_j указаны над (или под) вершинами.

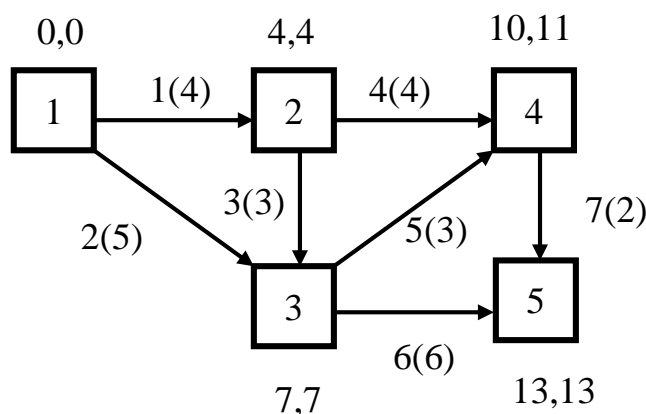


Рисунок 14

Критический путь $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5$. Критическое время выполнения всего проекта – 13 месяцев. Полный резерв времени работы (2, 4) равен 3 месяца. Полный резерв работы (3, 4) равен 1 месяц. Свободный резервы работы (2, 4) равен 2 месяца. Независимый резервы работы (2, 4) равен 2 месяца.

Самостоятельная работа № 9

Тема: Подготовка к экзамену по теме: Специальные главы математики

Цель:

- отработка навыка решения практических задач.
- подготовка к выполнению экзаменационного задания.

Изучение литературных и электронных источников:

- Специальные главы математики.

Практическое задание. Выполнение задания на тему " Специальные главы математики "

Самостоятельная работа № 10,11

Тема: Подготовка к практическим занятиям: Информационные технологии, изменившие мир. Управляющие механизмы. Умные города и производства. Подготовка к практическим занятиям: Информационные и управляющие технологии. Примеры распределенных информационно-управляющих систем.

Цель:

- отработка навыка решения практических задач.
- подготовка к выполнению экзаменационного задания.

Изучение литературных и электронных источников:

1. Просмотр видеоматериала курса.
2. Прочтение текстового материала.
3. Выполнение интерактивных упражнений.
3. Выполнение домашних работ.

Для доступа к интерактивному курсу и участия в обсуждениях можно использовать смартфон, планшетный ПК, ноутбук или настольный компьютер. Однако для прохождения упражнений с использованием Packet Tracer, а также сдачи контрольных работ и зачета рекомендуется использовать настольный компьютер.

Инструкция по навигации по материалам курса размещена на <https://static-course-assets.s3.amazonaws.com/loE11/RU/course/help/help2/index.html>

Интерактивные материалы курса помогут развить навыки, с помощью которых вы сможете:

- объяснить масштабы влияния, оказываемого Всеобъемлющим Интернетом;
- объяснить принципы взаимодействия между людьми, процессами, данными и вещами, в результате которых формируется Всеобъемлющий Интернет;
- выполнить настройку сетевых устройств и приложений для поддержки заданной реализации Всеобъемлющего Интернета;
- объяснить преимущества и недостатки Всеобъемлющего Интернета;
- объяснить процессы моделирования и испытания на прототипе в среде Всеобъемлющего Интернета.

Чтобы проверить, насколько вам удалось освоить понятия, описываемые в рамках этого курса, в конце каждой главы предусмотрена контрольная работа.

Контрольная работа содержит вопросы по материалу текущей главы и предназначена для отработки пройденного материала. У вас будет несколько попыток написания этой работы. Полученная оценка не будет выставляться в ведомость.

В рамках домашней работы предлагается выполнить несколько типов заданий. В некоторых видах заданий допускается присвоение баллов за частично правильные ответы в целях поощрения и стимулирования учащихся. Обратите внимание, что в заданиях с несколькими ответами баллы могут вычитаться, если были выбраны неправильные ответы.

В некоторых домашних работах могут встретиться вопросы, требующие ответа в форме краткого эссе. Подобные вопросы нужны для того, чтобы учащиеся могли оценить уровень своих знаний и освежить пройденный материал в памяти. Ответы в рамках таких заданий не оцениваются. Для самостоятельной оценки приводятся примеры возможных ответов.

По завершении домашней работы учащимся может быть представлена обратная связь по некоторым пунктам. В рамках обратной связи указываются источники в учебных материалах. Например, «См. тему 1.2.3» означает, что в данном задании используются материалы главы 1, раздела 2, темы 3.

Все домашние работы и упражнения доступны в разделе "*Модули*" электронного курса. В вводной главе доступна ссылка «Предварительный опрос». Опрос содержит 6 **пунктов**; его заполнение не должно занять более 5 минут.

Самостоятельная работа № 12

Тема: Подготовка к экзамену по теме: Компьютерные, сетевые и информационные технологии

Цель:

- отработка навыка решения практических задач.
- подготовка к выполнению экзаменационного задания.

Изучение литературных и электронных источников:

- Компьютерные, сетевые и информационные технологии.

Практическое задание. Выполнение задания на тему " Компьютерные, сетевые и информационные технологии"

Самостоятельная работа № 13,14

Тема: Подготовка к практическим занятиям: Наука и ее роль в развитии общества.

Организация научно-исследовательской работы. Научное исследование и его этапы. Подготовка к практическим занятиям: Метод системного анализа объектов и предметов исследования и методики его применения. Методика работы над рукописью исследования, особенности подготовки и оформления

Задание Составление содержания научно-исследовательской работы, согласно требованиям, предъявляемым к отчету по НИР

Описание: По предложенной теме диссертационного исследования сформулировать цели и задачи исследования. Составить содержание научно-исследовательской работы, согласно требованиям, предъявляемым к отчету по НИР.

Задание: Подготовка реферативного отчета

Описание: В рамках проведения научно-исследовательской работы, с помощью электронной базы федерального института патентной собственности, по ключевым словам, провести патентный поиск, оформить реферативный отчет.

Задание: Представление литературного обзора публикаций по теме научно-исследовательской работы

Описание: Провести литературный обзор публикаций по теме научно-исследовательской работы (диссертационной работы). Составить реферативный отчет.

Задание: Метод системного анализа объектов и предметов исследования и методики его применения

Описание: Провести системный анализ объектов и предметов исследования. Составить отчет.

Задание: Составление проекта автореферата диссертационной работы

Описание: Составить проект автореферата диссертационной работы, с указанием предмета и объекта исследования, научной новизны и практической значимости, краткого содержания диссертационной работы по главам.

Самостоятельная работа № 15

Тема: Подготовка к зачету по теме: Теория и практика инженерного исследования

Цель:

- отработка навыка решения практических задач.
- подготовка к выполнению зачетного задания.

Изучение литературных и электронных источников:

- Теория и практика инженерного исследования

Практическое задание. Выполнение заданий по теме " Теория и практика инженерного исследования". Ответы на вопросы.

Самостоятельная работа как важнейшая форма учебного процесса

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его

непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Федеральным Государственным образовательным стандартом предусматривается, как правило, 50 % часов из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу студентов (далее СРС). В связи с этим, обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части - процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования - «подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности».

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной финансовой ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа студентов играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. Они включают в себя:

- изучение и систематизацию официальных государственных документов - законов, постановлений, указов, нормативно-инструкционных и справочных материалов с использованием информационно-поисковых систем «Консультант-плюс», «Гарант», глобальной сети «Интернет»;
- изучение учебной, научной и методической литературы, материалов периодических изданий с привлечением электронных средств официальной, статистической, периодической и научной информации;
- подготовку докладов и рефератов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ;
- участие в работе студенческих конференций, комплексных научных исследованиях.

Самостоятельная работа приобщает студентов к научному творчеству, поиску и решению актуальных современных проблем.

2. Цели и основные задачи СРС

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента - подготовкой специалиста и бакалавра с высшим образованием. При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

3. Виды самостоятельной работы

В образовательном процессе высшего профессионального образовательного учреждения выделяется два вида самостоятельной работы - аудиторная, под руководством преподавателя, и внеаудиторная. Тесная взаимосвязь этих видов работ предусматривает дифференциацию и эффективность результатов ее выполнения и зависит от организации, содержания, логики учебного процесса (межпредметных связей, перспективных знаний и др.):

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основными видами самостоятельной работы студентов без участия преподавателей являются:

- формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);
- написание рефератов;

- подготовка к семинарам и лабораторным работам, их оформление;
- составление аннотированного списка статей из соответствующих журналов по отраслям знаний (педагогических, психологических, методических и др.);
- подготовка рецензий на статью, пособие;
- выполнение микроисследований;
- подготовка практических разработок;
- выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-компьютерных и индивидуальных работ по отдельным разделам содержания дисциплин и т.д.;
- компьютерный текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов.

Основными видами самостоятельной работы студентов с участием преподавателей являются:

- текущие консультации;
- коллоквиум как форма контроля освоения теоретического содержания дисциплин: (в часы консультаций, предусмотренных учебным планом);
- прием и разбор домашних заданий (в часы практических занятий);
- прием и защита лабораторных работ (во время проведения л/р);
- выполнение курсовых работ (проектов) в рамках дисциплин (руководство, консультирование и защита курсовых работ (в часы, предусмотренные учебным планом));
- выполнение учебно-исследовательской работы (руководство, консультирование и защита УИРС);
- прохождение и оформление результатов практик (руководство и оценка уровня сформированности профессиональных умений и навыков);
- выполнение выпускной квалификационной работы (руководство, консультирование и защита выпускных квалификационных работ) и др.

4. Организация СРС

Методика организации самостоятельной работы студентов зависит от структуры, характера и особенностей изучаемой дисциплины, объема часов на ее изучение, вида заданий для самостоятельной работы студентов, индивидуальных качеств студентов и условий учебной деятельности.

Процесс организации самостоятельной работы студентов включает в себя следующие этапы:

- подготовительный (определение целей, составление программы, подготовка методического обеспечения, подготовка оборудования);
- основной (реализация программы, использование приемов поиска информации, усвоения, переработки, применения, передачи знаний, фиксирование результатов, самоорганизация процесса работы);
- заключительный (оценка значимости и анализ результатов, их систематизация, оценка эффективности программы и приемов работы, выводы о направлениях оптимизации труда).

5. Деятельность студентов по формированию и развитию навыков учебной самостоятельной работы

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Выполняя самостоятельную работу под контролем преподавателя студент должен:

- освоить минимум содержания, выносимый на самостоятельную работу студентов и предложенный преподавателем в соответствии с Федеральными Государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) по данной дисциплине.
- планировать самостоятельную работу в соответствии с графиком самостоятельной работы, предложенным преподавателем.
- самостоятельную работу студент должен осуществлять в организационных формах, предусмотренных учебным планом и рабочей программой преподавателя.
- выполнять самостоятельную работу и отчитываться по ее результатам в соответствии с графиком представления результатов, видами и сроками отчетности по самостоятельной работе студентов.

студент может:

сверх предложенного преподавателем (при обосновании и согласовании с ним) и минимума обязательного содержания, определяемого ФГОС ВПО по данной дисциплине:

- самостоятельно определять уровень (глубину) проработки содержания материала;
- предлагать дополнительные темы и вопросы для самостоятельной проработки;
- в рамках общего графика выполнения самостоятельной работы предлагать обоснованный индивидуальный график выполнения и отчетности по результатам самостоятельной работы;
- предлагать свои варианты организационных форм самостоятельной работы;
- использовать для самостоятельной работы методические пособия, учебные пособия, разработки сверх предложенного преподавателем перечня;
- использовать не только контроль, но и самоконтроль результатов самостоятельной работы в соответствии с методами самоконтроля, предложенными преподавателем или выбранными самостоятельно.

Самостоятельная работа студентов должна оказывать важное влияние на формирование личности будущего специалиста, она планируется студентом самостоятельно. Каждый студент самостоятельно определяет режим своей работы и меру труда, затрачиваемого на овладение учебным содержанием по каждой дисциплине. Он выполняет внеаудиторную работу по личному индивидуальному плану, в зависимости от его подготовки, времени и других условий.

6. Общие рекомендации по организации самостоятельной работы

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях. Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы знаний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для экономических дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.
2. Наличие умений, навыков умственного труда:
 - а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;
 - б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.
3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.
4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение - это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.
5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение саморегулировать свое эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.
6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стресс-устойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним,
7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой.

Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков - важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Эффективность усвоения поступающей информации зависит от работоспособности человека в тот или иной момент его деятельности.

Работоспособность - способность человека к труду с высокой степенью напряженности в течение определенного времени. Различают внутренние и внешние факторы работоспособности.

К внутренним факторам работоспособности относятся интеллектуальные особенности, воля, состояние здоровья.

К внешним:

- организация рабочего места, режим труда и отдыха;
- уровень организации труда - умение получить справку и пользоваться информацией;
- величина умственной нагрузки.

Выдающийся русский физиолог Н. Е. Введенский выделил следующие условия продуктивности умственной деятельности:

- во всякий труд нужно входить постепенно;
- мерность и ритм работы. Разным людям присущ более или менее разный темп работы;
- привычная последовательность и систематичность деятельности;
- правильное чередование труда и отдыха.

Отдых не предполагает обязательного полного бездействия со стороны человека, он может быть достигнут простой переменной дела. В течение дня работоспособность изменяется. Наиболее плодотворным является *утреннее время (с 8 до 14 часов)*, причем максимальная работоспособность приходится на период с 10 до 13 часов, затем *послеобеденное* - (с 16 до 19 часов) и *вечернее* (с 20 до 24 часов). Очень трудный для понимания материал лучше изучать в начале каждого отрезка времени (лучше всего утреннего) после хорошего отдыха. Через 1 - 1,5 часа нужны перерывы по 10 - 15 мин, через 3 - 4 часа работы отдых должен быть продолжительным - около часа.

Составной частью научной организации умственного труда является овладение техникой умственного труда.

Физически здоровый молодой человек, обладающий хорошей подготовкой и нормальными способностями, должен, будучи студентом, отдавать *учению 9 - 10 часов в день* (из них 6 часов в вузе и 3 - 4 часа дома). Любой предмет нельзя изучить за несколько дней перед экзаменом. Если студент в году работает систематически, то он быстро все вспомнит, восстановит забытое. Если же подготовка шла аврально, то у студента не будет даже общего представления о предмете, он забудет все сданное.

Следует взять за правило: *учиться ежедневно, начиная с первого дня семестра.*

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо заниматься по 3 - 5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и ее производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться в работу, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр.

Ритм в работе - это ежедневные самостоятельные занятия, желательны в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать ритмичную работу, требуется сознательное напряжение воли. Как только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью.

Если порядок в работе и ее ритм установлены правильно, то студент изо дня в день может работать, не снижая своей производительности и не перегружая себя. Правильная смена одного вида работы другим позволяет отдыхать, не прекращая работы.

Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы - это составление расписания, которое должно отражать время занятий, их характер (теоретический курс, практические занятия, графические работы, чтение), перерывы на обед, ужин, отдых, сон, проезд и т.д. Расписание не предопределяет содержания работы, ее содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным (кроме исправления ошибок в планировании, которые могут возникнуть из-за недооценки объема работы или переоценки своих сил).

При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами.

Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более трудной работе. И напоследок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько определенных моторных действий (черчение, построение графиков и т.п.).

Самостоятельные занятия потребуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.

Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут - работа, 5-10 минут - перерыв; после 3 часов работы перерыв - 20 - 25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

7. Самостоятельная работа студента - необходимое звено становления исследователя и специалиста

Прогресс науки и техники, информационных технологий приводит к значительному увеличению научной информации, что предъявляет более высокие требования не

только к моральным, нравственным свойствам человека, но и в особенности, постоянно возрастающие требования в области образования - обновление, модернизация общих и профессиональных знаний, умений специалиста.

Всякое образование должно выступать как динамический процесс, присущий человеку и продолжающийся всю его жизнь. Овладение научной мыслью и языком науки является необходимой составляющей в самоорганизации будущего специалиста исследователя. Под этим понимается не столько накопление знаний, сколько овладение научно обоснованными способами их приобретения. В этом, вообще говоря, состоит основная задача вуза.

Специфика вузовского учебного процесса, в организации которого самостоятельной работе студента отводятся все больше места, состоит в том, что он является как будто бы последним и самым адекватным звеном для реализации этой задачи. Ибо во время учебы в вузе происходит выработка стиля, навыков учебной (познавательной) деятельности, рациональный характер которых будет способствовать постоянному обновлению знаний высококвалифицированного выпускника вуза.

Однако до этого пути существуют определенные трудности, в частности, переход студента от синтетического процесса обучения в средней школе, к аналитическому в высшей. Это связано как с новым содержанием обучения (расширение общего образования и углубление профессиональной подготовки), так и с новыми, неизвестными до сих пор формами: обучения (лекции, семинары, лабораторные занятия и т.д.). Студент получает не только знания, предусмотренные программой и учебными пособиями, но он также должен познакомиться со способами приобретения знаний так, чтобы суметь оценить, что мы знаем, откуда мы это знаем и как этого знания мы достигли. Ко всему этому приходят через собственную самостоятельную работу.

Это и потому, что самостоятельно приобретенные знания являются более оперативными, они становятся личной собственностью, а также мотивом поведения, развивают интеллектуальные черты, внимание, наблюдательность, критичность, умение оценивать. Роль преподавателя в основном заключается в руководстве накопления знаний (по отношению к первокурсникам), а в последующие годы учебы, на старших курсах, в совместном установлении проблем и заботе о самостоятельных поисках студента, а также контролировании за их деятельностью. Отметим, что нельзя ограничиваться только приобретением знаний, предусмотренных программой дисциплины, надо постоянно углублять полученные знания, сосредотачивая их на какой-нибудь узкой определенной области, соответствующей интересам студента. Углубленное изучение всех предметов, предусмотренных программой, на практике является возможным, и хорошая организация работы позволяет экономить время, что создает условия для глубокого, систематического, заинтересованного изучения самостоятельно выбранной студентом темы.

Конечно, все советы, примеры, рекомендации в этой области, даваемые преподавателем, или определенными публикациями, или другими источниками, не гарантируют никакого успеха без проявления собственной активности в этом деле, т.е. они не дают готовых рецептов, а должны способствовать анализу собственной работы, ее целей, организации в соответствии с индивидуальными особенностями. Учитывая личные возможности, существующие условия жизни и работы, навыки, на основе этих рекомендаций, возможно, выработать индивидуально обоснованную совокупность мето-

дов, способов, найти свой стиль или усовершенствовать его, чтобы, изучив определенный материал, иметь время оценить его значимость, пригодность и возможности его применения, чтобы, в конечном счете, обеспечить успешность своей учебы с будущей профессиональной деятельности

8. Методические рекомендации для студентов по отдельным формам самостоятельной работы

С первых же сентябрьских дней на студента обрушивается громадный объем информации, которую необходимо усвоить. Нужный материал содержится не только в лекциях (запомнить его - это только малая часть задачи), но и в учебниках, книгах, статьях. Порой возникает необходимость привлекать информационные ресурсы Интернет.

Система вузовского обучения подразумевает значительно большую самостоятельность студентов в планировании и организации своей деятельности. Вчерашнему школьнику сделать это бывает весьма непросто: если в школе ежедневный контроль со стороны учителя заставлял постоянно и систематически готовиться к занятиям, то в вузе вопрос об уровне знаний вплотную встает перед студентом только в период сессии. Такая ситуация оборачивается для некоторых соблазном весь семестр посвятить свободному времяпрепровождению («когда будет нужно - выучу!»), а когда приходит пора экзаменов, материала, подлежащего усвоению, оказывается так много, что никакая память не способна с ним справиться в оставшийся промежуток времени.

8.1. Работа с книгой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Различают два вида чтения; первичное и вторичное. *Первичное* - это внимательное, неторопливое чтение, при котором можно остановиться на трудных местах. После него не должно остаться ни одного непонятого слова. Содержание не всегда может быть понятно после первичного чтения.

Задача *вторичного* чтения полное усвоение смысла целого (по счету это чтение может быть и не вторым, а третьим или четвертым).

8.2. Правила самостоятельной работы с литературой

Как уже отмечалось, самостоятельная работа с учебниками и книгами (а также самостоятельное теоретическое исследование проблем, обозначенных преподавателем на лекциях) - это важнейшее условие формирования у себя научного способа познания. Основные советы здесь можно свести к следующим:

- Составить перечень книг, с которыми Вам следует познакомиться; «не старайтесь запомнить все, что вам в ближайшее время не понадобится, - советует студенту и молодому ученому Г. Селье, - запомните только, где это можно отыскать» (Селье, 1987. С. 325).

- Сам такой перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и дипломных работ, а что Вас интересует за рамками официальной учебной деятельности, то есть что может расширить Вашу общую культуру...).

- Обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и дипломных работ это позволит очень сэкономить время).

- Разобраться для себя, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие - просто просмотреть.

- При составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и научными руководителями (или даже с более подготовленными и эрудированными сокурсниками), которые помогут Вам лучше сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время...

- Естественно, все прочитанные книги, учебники и статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц).

- Если книга - Ваша собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные для Вас мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора (это очень хороший совет, позволяющий экономить время и быстро находить «избранные» места в самых разных книгах).

- Если Вы раньше мало работали с научной литературой, то следует выработать в себе способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием -

научиться «читать медленно», когда Вам понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать), и это может занять немалое время (у кого-то - до нескольких недель и даже месяцев); опыт показывает, что после этого студент каким-то «чудом» начинает буквально заглатывать книги и чуть ли не видеть «сквозь обложку», стоящая это работа или нет...

- «Либо читайте, либо перелистывайте материал, но не пытайтесь читать быстро... Если текст меня интересует, то чтение, размышление и даже фантазирование по этому поводу сливаются в единый процесс, в то время как вынужденное скорочтение не только не способствует качеству чтения, но и не приносит чувства удовлетворения, которое мы получаем, размышляя о прочитанном», - советует Г. Селье (Селье, 1987. -С. 325-326).
- Есть еще один эффективный способ оптимизировать знакомство с научной литературой - следует увлечься какой-то идеей и все книги просматривать с точки зрения данной идеи. В этом случае студент (или молодой ученый) будет как бы искать аргументы «за» или «против» интересующей его идеи, и одновременно он будет как бы общаться с авторами этих книг по поводу своих идей и размышлений... Проблема лишь в том, как найти «свою» идею...

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель -извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют *четыре основные установки в чтении научного текста:*

1. информационно-поисковый (задача - найти, выделить искомую информацию)
2. усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить, как сами сведения, излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)
3. аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)
4. творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде - как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. - использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к научному тексту связано существование и нескольких *видов чтения:*

1. библиографическое - просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;
2. просмотрное - используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;
3. ознакомительное - подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц, цель - познакомиться с характером

информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;

4. изучающее - предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;

5. аналитико-критическое и творческое чтение - два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач. Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе - поиск тех суждений, фактов, по которым или в связи, с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее - именно оно позволяет в работе с учебной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках учебной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с научным текстом.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

1. Аннотирование - предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;

2. Планирование - краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;

3. Тезирование - лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;

4. Цитирование - дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;

5. Конспектирование - краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект - сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

8.3. Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта;

2. Выделите главное, составьте план;

3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора;

4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.

5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и

выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

Практические занятия.

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Самопроверка.

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, используя лист опорных сигналов, воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки основных положений и доказательств.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако

следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

Консультации

Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

Подготовка к экзаменам и зачетам.

Изучение многих общепрофессиональных и специальных дисциплин завершается экзаменом. Подготовка к экзамену способствует закреплению, углублению и обобщению знаний, получаемых, в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. Готовясь к экзамену, студент ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, углубляет, систематизирует и упорядочивает свои знания. На экзамене студент демонстрирует то, что он приобрел в процессе обучения по конкретной учебной дисциплине.

Экзаменационная сессия - это серия экзаменов, установленных учебным планом. Между экзаменами интервал 3 - 4 дня. Не следует думать, что 3 - 4 дня достаточно для успешной подготовки к экзаменам.

В эти 3 - 4 дня нужно систематизировать уже имеющиеся знания. На консультации перед экзаменом студентов познакомят с основными требованиями, ответят на возникшие у них вопросы. Поэтому посещение консультаций обязательно.

Требования к организации подготовки к экзаменам те же, что и при занятиях в течение семестра, но соблюдаться они должны более строго. Во-первых, очень важно соблюдение режима дня; сон не менее 8 часов в сутки, занятия заканчиваются не позднее, чем за 2 - 3 часа до сна. Оптимальное время занятий, особенно по математике - утренние и дневные часы. В перерывах между занятиями рекомендуются прогулки на свежем воздухе, неустойчивые занятия спортом. Во-вторых, наличие хороших собственных конспектов лекций. Даже в том случае, если была пропущена какая-либо лекция, необходимо во время ее восстановить (переписать ее на кафедре), обдумать, снять возникшие вопросы для того, чтобы запоминание материала было осознанным. В-третьих, при подготовке к экзаменам у студента должен быть хороший учебник или конспект литературы, прочитанной по указанию преподавателя в течение семестра. Здесь можно эффективно использовать листы опорных сигналов.

Вначале следует просмотреть весь материал по сдаваемой дисциплине, отметить для себя трудные вопросы. Обязательно в них разобраться. В заключение еще раз целесообразно повторить основные положения, используя при этом листы опорных сигналов.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время экзаменационной сессии для систематизации знаний.

Правила подготовки к зачетам и экзаменам:

- Лучше сразу сориентироваться во всем материале и обязательно расположить весь материал согласно экзаменационным вопросам (или вопросам, обсуждаемым на семинарах), эта работа может занять много времени, но все остальное - это уже технические детали (главное - это ориентировка в материале!).

- Сама подготовка связана не только с «запоминанием». Подготовка также предполагает и переосмысление материала, и даже рассмотрение альтернативных идей.

- Готовить «шпаргалки» полезно, но пользоваться ими рискованно. Главный смысл подготовки «шпаргалок» - это систематизация и оптимизация знаний по данному предмету, что само по себе прекрасно - это очень сложная и важная для студента работа, более сложная и важная, чем простое поглощение массы учебной информации. Если студент самостоятельно подготовил такие «шпаргалки», то, скорее всего, он и экзамены сдавать будет более уверенно, так как у него уже сформирована общая ориентировка в сложном материале.

- Как это ни парадоксально, но использование «шпаргалок» часто позволяет отвечающему студенту лучше демонстрировать свои познания (точнее - ориентировку в знаниях, что намного важнее знания «запомненного» и «тут же забытого» после сдачи экзамена).

Сначала студент должен продемонстрировать, что он «усвоил» все, что требуется по программе обучения (или по программе данного преподавателя), и лишь после этого он вправе высказать иные, желательно аргументированные точки зрения.

Методические указания по грамматике английского языка

Верхняя Пышма 2015

Содержание

Введение.....	4
Unit 1: Present Simple.....	5
Unit 2: Present Continuous.....	9
Unit 3: Сопоставление Present Simple и Present Continuous.....	13
Unit 4: Глаголы, не имеющие форм группы Continuous.....	15
Unit 5: Past Simple.....	17
Unit 6: Past Continuous.....	22
Unit 7: Сопоставление Past Continuous и Past Simple.....	25
Unit 8: Present Perfect.....	27
Unit 9: Сопоставление Past Simple и Present Perfect.....	32
Unit 10: Future Simple.....	36
Unit 11: Be Going To.....	41
Unit 12: The Passive.....	44
Список литературы.....	52

Введение

Учебно-методический комплекс дисциплины английский язык предназначен для практических занятий направления подготовки магистров 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника» программы «Управление и устойчивое развитие энергохозяйства предприятий».

Одним из компонентов содержания курса иностранного языка для неязыковых вузов являются средства общения, которые предусматривают такие языковые явления как грамматические формы и конструкции. В соответствии с программой УМО в области лингвистики данные методические указания направлены на развитие и совершенствование грамматических навыков (в том числе приобретенных в школе).

Практическая цель заключается в формировании у студента способности и готовности к межкультурной коммуникации, что предполагает развитие умений опосредованного письменного (чтение, письмо) и непосредственного устного (говорение, аудирование) иноязычного общения. В связи с выше сказанным методические указания ориентированы на развитие грамматических навыков, как для чтения, так и для устного общения.

Теоретический материал излагается в виде таблиц, использования функциональных примеров. Упражнения для закрепления новых структур способствуют активному усвоению материала.

Данные методические указания могут быть использованы как для самообразования, так и для занятий под руководством преподавателя, в качестве грамматического дополнения к любому курсу английского языка соответствующего уровня.

Unit 1: Present Simple – настоящее простое время

Образование

Настоящее простое время образуется с помощью *подлежащего* (существительного или местоимения в именительном падеже) и *смыслового глагола*. В утверждениях к смысловому глаголу в 3-м лице единственного числа обычно прибавляется окончание *-s*. В вопросах и отрицаниях с местоимениями *I, you, we, they* используется вспомогательный глагол *do/don't*, а с местоимениями *he, she, it* – *does/doesn't*. Если смысловой глагол употребляется с *does/doesn't*, окончание *-s* к нему не прибавляется.

Утверждение

I/You/We/They	read.
He/She/It	reads.

Вопрос

Do	I/you/we/they	read?
Does	he/she/it	

Отрицание

	Полная форма	Краткая форма	
I/You/We/They	do not	don't	
He/She/It	does not	doesn't	read.

Употребление

Present Simple употребляется для выражения:

- постоянных состояний,
Mr. Gibson **is** a businessman. He **lives** in New York. (постоянное состояние)
- повторяющихся и повседневных действий (часто со следующими наречиями: always, never, usually и т.д.),
He **usually starts** work at 9 a.m. (повседневное действие)
He **often stays** at the office until late in the evening. (повседневное действие)
- непреложных истин и законов природы,
The moon **moves** round the earth.
- действий, происходящих по программе или по расписанию (движение поездов, автобусов и т.д.).
The bus **leaves** in ten minutes.

Правописание

- Большая часть глаголов в 3-м лице единственного числа приобретает окончание –s.
I read – he reads
- К глаголам, оканчивающимся на –ss, –sh, –ch, –x и –o, прибавляется –es.
I kiss – he kisses, I brush – he brushes, I teach – he teaches, I fix – he fixes, I go – he goes
- В глаголах, оканчивающихся на **согласный + y**, опускается y и прибавляется –ies.
I try – he tries, I fly – he flies
- В глаголах, оканчивающихся на **гласный + y**, прибавляется окончание –s.
I buy – he buys

Маркеры

Маркерами Present Simple являются: *usually, always* и т.п., *every day/week/month/year* и т.д., *on Mondays/Tuesdays* и т.д., *in the morning/afternoon/evening, at night/the weekend* и т.д.

Present Simple: exercises

1.1 Complete the sentences using one of the following:

cause(s) close(s) drink(s) live(s) open(s) speak(s) take(s) place

1. Ann **speaks** German very well.
2. I never --- coffee.
3. The swimming pool --- at 9 o'clock and --- at 18.30 every day.
4. Bad driving --- many accidents. **causes**
5. My parents --- in a very at small flat. **live**
6. The Olympic Games --- every four years. **Take place**

1.2 Put the verb into the correct form.

1. Jane **doesn't drink** (not/drink) tea very often.
2. What time --- (the banks/close) in Britain? **Do the banks close**
3. 'Where --- (Martin/come) from?' 'He's Scottish.' **Does Martin come**
4. 'What --- (you/do)?' 'I'm an electrical engineer.' – **do you do**
5. It --- (take) me an hour to get to work. How long --- (it/take) you? – **take, does it take**
6. I --- (play) the piano but I --- (not/play) very well. **Play , don't play**
7. I don't understand this sentence. What --- (this word/mean)? **Does this word mean**

1.3 Use one of the following verbs to complete these sentences. Sometimes you need the negative:

believe eat flow go grow make rise tell translate

1. The earth **goes** round the sun.
2. Rice **doesn't grow** in Britain.
3. The sun --- in the east. **rises**
4. Bees --- honey. - **make**
5. Vegetarians --- meat. – **don't eat**
6. An atheist --- in God. **doesn't believe**
7. An interpreter --- from one language into another. **translates**
8. A liar is someone who --- the truth. **Does not tell**
9. The River Amazon --- into the Atlantic Ocean. **flows**

1.4 Ask Liz questions about herself and her family.

1. You know that Liz plays tennis. You want to know how often. Ask her.
How often **do you play tennis?**
2. Perhaps Liz's sister plays tennis too. You want to know. Ask Liz.
--- your sister --- (- **does your sister play tennis?**)
3. You know that Liz reads a newspaper every day. You want to know which one. Ask her.
--- (**Which newspaper do you read everyday?**)
4. You know that Liz's brother works. You want to know what he does. Ask Liz.
--- - **what does your brother do?**
5. You know that Liz goes to the cinema a lot. You want to know how often. Ask her.
--- **How often do you go to the cinema?**
6. You don't know where Liz's mother lives. Ask Liz.
--- **Where does your mother live ?**

1.5 Complete using one of the following.

I apologise I insist I promise I recommend I suggest

1. It's a nice day. **I suggest** we go out for a walk.
2. I won't tell anybody what you said. ---. **I promise**
3. (in a restaurant) You must let me pay for the meal. ---. – **I insist**
4. --- for what I said about you. It wasn't true and I shouldn't have said it. – **I apologize**
5. The new restaurant in Hill Street is very good --- it. **I recommend**

Unit 2: Present Continuous – настоящее продолженное время

Образование

Настоящее продолженное время образуется с помощью вспомогательного глагола *to be* и смыслового глагола, к которому добавляется *-ing*.

Утверждение

	Полная форма	Краткая форма	
I	am	'm	
He/She/It	is	's	reading.
You/We/They	are	're	

Вопрос

Am	I	
Is	he/she/it	reading?

Are you/we/they

Отрицание

	Полная форма	Краткая форма	
I	am not	'm not	
He/She/It	is not	isn't	reading.
You/We/They	are not	aren't	

Употребление

Present Continuous употребляется для выражения:

- действий, происходящих в момент речи,
He **is reading** a book right now.
- временных действий, происходящих в настоящий период времени, но не обязательно в момент речи,
She **is practicing** for a concert these days. (В данный момент она не играет. Она отдыхает.)
- действий, происходящих слишком часто и по поводу которых мы хотим высказать раздражение или критику (обычно со словом *always*),
“You’re **always interrupting** me!” (раздражение)
- действий, заранее запланированных на будущее.
He **is flying** to Milan in an hour. (это запланировано)

Правописание

- В глаголах, оканчивающихся на –e, обычно опускается –e и прибавляется –ing.
dance – dancing, **НО** agree - agreeing
- В глаголах, оканчивающихся на ударный слог с кратким гласным между двумя согласными, конечная согласная буква удваивается и прибавляется –ing.
refer – referring, run – running, get – getting, **НО** open – opening
- В глаголах, оканчивающихся на –l, эта буква l удваивается и прибавляется –ing.
travel - travelling
- В глаголах, оканчивающихся на –ie, опускается –ie и прибавляется –y + -ing.
lie – lying, die - dying

Маркеры

Маркерами Present Continuous являются: *now, at the moment, these days, at present, always, tonight, still* и т.д.

Present Continuous: exercises

2.1 Complete the sentences with one of the following verbs in the correct form:

come get happen look make start stay try work

1. 'You **'re working** hard today.' 'Yes, I have a lot to do.'
2. I --- for Christine. Do you know where she is?
3. It --- dark. Shall I turn on the light?
4. They haven't got anywhere to I've at the moment. They --- with friends until they find somewhere.
5. 'Are you ready, Ann?' 'Yes, I ---.'
6. Have you got an umbrella? It --- to rain. **Is starting**

7. You --- a lot of noise. Could you be quieter? I --- to concentrate. **Are making, am trying**
8. Why are all these people here? What ---? **Is happening**

2.2 Use the words in brackets to complete the questions.

1. **'Is Colin working** this week?' 'No, he's on holiday.' (Colin/work)
2. Why --- at me like that? What's the matter? (you/look) **are you looking**
3. 'Jenny is a student at university.' 'Is she? What --- ?' (she/study) **is she studying**
4. --- to the radio or can I turn it off? (anybody/listen) **Is anybody listening**
5. How is your English? --- better? (it/get) **Is it getting**

2.3 Put the verb into the correct form. Sometimes you need the negative (I'm not doing etc.).

1. I'm tired. **I'm going** (go) to bed now. Goodnight!
2. We can go out now. it **isn't raining** (rain) any more.
3. 'How is your new job?' 'Not so good at the moment. I --- (enjoy) it very much.' **'m not enjoying**
4. Catherine phoned me last night. She's on holiday in France. She --- (have) a great time and doesn't want to come back. **'s having**
5. I want to lose weight, so this week I --- (eat) lunch. **'m not eating**
6. Angela has just started evening classes. She --- (learn) German. **'s learning**
7. I think Paul and Ann have had an argument. They --- (speak) to each other. **Aren't speaking**

2.4 Read this conversation between Brian and Sarah. Put the verbs into the correct form.

SARAH: Brian! How nice to see you! What (1) --- (you/do) these days?

BRIAN: I (2) --- (train) to be a supermarket manager.

SARAH: Really? What's it like? (3) --- (you/enjoy) it?

BRIAN: It's all right. What about you?

SARAH: Well, actually I (4) --- (not/work) at the moment.

I (5) --- (try) to find a job but it's not easy.

But I'm very busy. I (6) --- (decorate) my flat.

BRIAN: (7) --- (you/do) it alone?

SARAH: No, some friends of mine (8) --- (help) me.

2.5 Complete the sentences using one of these verbs: get change rise fall increase

You don't have to use all the verbs and you can use a verb more than once.

1. The population of the world **is rising** very fast.
2. Ken is still ill but he --- better slowly.
3. The world ---. Things never stay the same.
4. The cost of living ---. Every year things are more expensive.
5. The economic situation is already very bad and it --- worse.

Unit 3: Сопоставление Present Simple и Present Continuous

Present Simple

- Present Simple употребляется для выражения постоянных состояний, повторяющихся и повседневных действий.

Claire Bryan **works** as a secretary.
She **starts** work at eight o'clock every day.
She **types** Mr. Moore's letters.

Present Continuous

- Present Continuous употребляется для выражения временных действий, происходящих в момент речи или в настоящий период времени.

It's nine o'clock. Claire is still at home because she is ill.
She is wearing her pajamas and she is sitting on her bed.
She isn't working today.

Present Simple or Present Continuous: exercises

3.1 Are the underlined verbs right or wrong? Correct the verbs that are wrong.

1. Water boils at 100 degrees celsius. RIGHT
2. The water boils. Can you turn it off? WRONG: is boiling
3. Look! That man tries to open the door of your car. --- wrong, is trying
4. Can you hear those people? What do they talk about? --- wrong, are they talking
5. The moon goes round the earth. ---right
6. I must go now. It gets late. --- wrong, is getting
7. I usually go to work by car. --- right
8. 'Hurry up! It's time to leave.' 'OK, I come.' --- wrong, am coming
9. I hear you've got a new job. How do you get on? --- wrong, are you getting on

3.2 Put the verb in the correct form, present continuous or present simple.

1. Let's go out. It isn't raining (not/rain) now.
2. Julia is very good at languages. She speaks (speak) four languages very well.
3. Hurry up! Everybody --- (wait) for you. – is waiting
4. '--- (you/listen) to the radio?' 'No, you can turn it off.' – Are you listening
5. '--- (you/listen) to the radio every day?' 'No, just occasionally.' – Do you listen
6. The River Nile --- (flow) into the Mediterranean. - flows
7. Look at the river. It --- (flow) very fast today - much faster than usual. – is flowing
8. We usually --- (grow) vegetables in our garden but this year we --- (not/grow) any. –grow, are not growing
9. 'How is your English?' 'Not bad. It --- (improve) slowly.' Is improving
10. Ron is in London at the moment. He --- (stay) at the Park Hotel. He --- (always/stay) there when he's in London. – is staying, always stays
11. Can we stop walking soon? I --- (start) to feel tired. – am starting
12. 'Can you drive?' 'I --- (learn). My father --- (teach) me.' – am learning, is teaching
13. Normally I --- (finish) work at 5.00, but this week I --- (work) until 6.00 to earn a bit more money. – finish, am working
14. My parents --- (live) in Bristol. They were born there and have never lived anywhere else. Where -- (your parents/live)? Live, do your parents live
15. Sonia --- (look) for a place to live. She --- (stay) with her sister until she finds somewhere. - is looking , is staying
16. 'What --- (your father/do)?' 'He's an architect but he --- (not/work) at the moment.' - does your father do, is not working
17. (at a party) Usually I --- (enjoy) parties but I --- (not/enjoy) this one very much. - enjoy, am not enjoying
18. The train is never late. It --- (always/leave) on time. Always leaves
19. Jim is very untidy. He --- (always/leave) his things all over the place. - is always leaving

3.3 Finish B's sentences. Use always ~ing (see Section B).

1. A: I'm afraid I've lost my key again.
B: Not again! You're always losing your key.
2. A: The car has broken down again.
B: That car is useless! It ---
Is always breaking down
3. A: Look! You've made the same mistake again.

B: Oh no, not again! I ---
Am always making the same mistake
4. A: Oh, I've left the lights on again.
B: Typical! You --- are always leaving the lights on

Unit 4: Глаголы, не имеющие форм группы Continuous

Во временах группы Continuous обычно не употребляются глаголы:

- выражающие восприятия, ощущения (see, hear, feel, taste, smell),
This cake **tastes** delicious.
- выражающие мыслительную деятельность (know, think, remember, forget, recognize, believe, understand, notice, realize, seem, sound),
I **don't know** his name.
- выражающие эмоции, желания (love, prefer, like, hate, dislike, want),
Shirley loves jazz music.
- include, matter, need, belong, cost, mean, own, appear, have (когда выражает принадлежность) и т.д.
That jacket **costs** a lot of money.

Глаголы, не имеющие форм группы Continuous: exercises

4.1 Are the underlined verbs right or wrong? Correct the ones that are wrong.

1. I'm seeing the manager tomorrow morning. RIGHT
2. I'm feeling hungry. Is there anything to eat? --- wrong, I feel hungry
3. Are you believing in God? --- wrong, do you believe in God? no I'm an atheist
4. This sauce is great. It's tasting really good. --- - wrong, it tastes really good.
5. I'm thinking this is your key. Am I right? --- wrong, I think

4.2 Look at the pictures. Use the words in brackets to make sentences. (You should also study Unit 3 before you do this exercise.)

1. (you/not/seem/very happy today) You don't seem very happy today.
2. (what/you/do?) ---what are you doing?
Be quiet! (I/think) ---I'm thinking
3. (who/this umbrella/belong to?) --- To whom does this umbrella belong ?
I've no idea.
4. (the dinner/smell/good) ---The dinner smells good.
5. Excuse me. (anybody/sit/here?) ---Is anybody sitting here?
No, it's free
6. Can you ring me back in half an hour? (I/have/dinner) ---I'm having dinner

4.3 Put the verb into the correct form, present continuous or present simple.

1. Are you hungry? Do you want something to eat? (you/want)
2. Jill is interested in politics but she --- to a political party. (not/belong) does not belong to
3. Don't put the dictionary away. I --- it. (use) I'm using it
4. Don't put the dictionary away. I --- it. (need) I need it.
5. Who is that man? What ---? (he/want) does he want
6. Who is that man? Why --- at us? (he/look) is he looking
7. George says he's 80 years old but nobody --- him. (believe) - believes
8. She told me her name but I --- it now. (not/remember) – don't remember

9. I --- of selling my car. (think) Would you be interested in buying it? Am thinking
 10. I --- you should sell your w
 car. (think) You --- it very often. (not/use) think, don't use
 11. I used to drink a lot of coffee but these days I --- tea. (prefer) prefer
 12. Air --- mainly of nitrogen and oxygen. (consist) consists

4.4 Complete the sentences using the most suitable form of be. Sometimes you must use the simple (am/is/are) and sometimes the continuous is more suitable (am/is/are being).

1. I can't understand why he's being so selfish. He isn't usually like that.
2. Jack --- very nice to me at the moment. I wonder why. – was being
3. You'll like Jill when you meet her. She --- very nice. - is
4. Normally you are very sensible, so why --- so silly about this matter? Are you being
5. Why isn't Sarah at work today? --- ill? – Is she being

Unit 5: Past Simple – прошедшее простое время

Образование

Правильные глаголы

Прошедшее простое время правильных глаголов образуется путем прибавления *-ed* к смысловому глаголу. Вопросы и отрицания строятся с помощью вспомогательного глагола *did/did not (didn't)* и смыслового глагола без *-ed*.

Неправильные глаголы

Прошедшее простое время неправильных глаголов образуется не путем прибавления *-ed*, а другими способами. Например: leave – left, cut – cut, swim – swam (вторая форма неправильных глаголов).

Вопросы и отрицания строятся с помощью вспомогательного глагола *did/did not (didn't)* и корневой (основной) формы смыслового глагола. Например:

She watched TV last night. – **Did** she **watch** TV last night? – She **did not watch** TV last night.
 They left. – **Did** they **leave**? – They **didn't leave**.

Утверждение

I	
He/She/It	finished (left).
You/We/They	

Вопрос

	I	
Did	he/she/it	finish (leave)?
	you/we/they	

Отрицание

	Полная форма	Краткая форма
I		
He/She/It	did not	didn't
You/We/They		finish (leave).

Употребление

Past Simple употребляется для выражения:

- действий, произошедших в прошлом в определенное указанное время, то есть нам известно, **когда** эти действия произошли,
They **graduated four years ago**. (Когда они закончили университет? Четыре года назад. Мы знаем время.)
- повторяющихся в прошлом действий, которые более не происходят. В этом случае могут использоваться наречия частоты (*always, often, usually* и т.д.)
He **often played** football with his dad when he was five. (Но теперь он уже не играет в футбол со своим отцом.)
- действий, следовавших непосредственно одно за другим в прошлом.
They **cooked** the meal **first**. **Then** they **ate** with their friends.
- Past Simple употребляется также, когда речь идет о людях, которых уже нет в живых.
Princess Diana **visited** a lot of schools.

Правописание

- К глаголам, оканчивающимся на **-e**, прибавляется только **-d**.
dance – danced
- В глаголах, оканчивающихся на **согласную + y**, опускается **y** и прибавляется **-ied**.
try – tried
- К глаголам, оканчивающимся на **гласную + y**, прибавляется **-ed**.
play – played
- В глаголах, оканчивающихся на **ударный слог с кратким гласным** между двумя согласными, конечная согласная буква удваивается и прибавляется **-ed**.
plan – planned, **НО** open – opened
- В глаголах, оканчивающихся на **-l**, эта буква **l** удваивается и прибавляется **-ed**.
travel – travelled, quarrel – quarrelled

Маркеры

Маркерами Past Simple являются: *yesterday, last night/week/month/year/Monday* и т.д., *two days/weeks/months/years ago, then, when, in 1992* и т.д.

Past Simple: exercises

5.1 Read what Sharon says about a typical working day:

SHARON

I usually get up at 7 o'clock and have a big breakfast. I walk to work, which takes me about half an hour. I start work at 8.45. I never have lunch. I finish work at 5 o'clock. I'm always tired when I get home. I usually cook a meal in the evening. I don't usually go out. I go to bed at about 11 o'clock. I always sleep well.

Yesterday was a typical working day for Sharon. Write she did or didn't do yesterday.

1. She got up at 7 o'clock.
2. She --- a big breakfast.
3. She ---.
4. It --- to get to work.
5. --- at 8.45.
6. --- lunch.
7. --- at 5 o'clock.

8. --- tired when --- home.
9. --- a meal yesterday evening.
10. --- out yesterday evening.
11. --- at 11 o'clock.
12. --- well last night.

5.2 Put one of these verbs in each sentence:

buy catch cost drink fall hurt sell spend teach throw win write

1. Mozart wrote more than 600 pieces of music.
2. 'How did you learn to drive?' 'My father --- me.'
3. We couldn't afford to keep our car, so we --- it.
4. I was very thirsty. I --- the water very quickly.
5. Paul and I played tennis yesterday. He's much better than me, so he --- easily.
6. Don --- down the stairs this morning and --- his leg.
7. Jim --- the ball to Sue, who --- it.
8. Ann --- a lot of money yesterday. She --- a dress which --- 1100.

5.3 A friend has just come back from holiday. You ask him about it. Write your questions.

1. (where/go?) Where did you go?
2. (go alone?) ---
3. (food/good?) ---
4. (how long/stay there?) ---
5. (stay/at a hotel?) ---
6. (how/travel?) ---
7. (the weather/fine?) ---
8. (what/do in the evenings?) ---
9. (meet anybody interesting?) ---

5.4 Complete the sentences, Put the verb into the correct form, positive or negative.

1. It was warm, so I took off my coat. (take)
2. The film wasn't very good. I didn't enjoy it very much. (enjoy)
3. I knew Sarah was very busy, so I --- her. (disturb)
4. I was very tired, so I --- to bed early. (go)
5. The bed was very uncomfortable. I --- very well. (sleep)
6. Sue wasn't hungry, so she --- anything. (eat)
7. We went to Kate's house but she --- at home. (be)
8. It was a funny situation but nobody --- (laugh)
9. The window was open and a bird --- into the room. (fly)
10. The hotel wasn't very expensive. It --- very much. (cost)
11. I was in a hurry, so I --- time to phone you. (have)

Unit 6: Past Continuous – прошедшее продолженное время

1
2

Образование

Прошедшее продолженное время образуется с помощью *was/were* (формы past simple глагола to be) и *смыслового глагола*, к которому добавляется *-ing*. В вопросах *was/were* ставятся перед подлежащим. В отрицаниях *not* следует после *was/were*.

	Утверждение	
w		
a		
sI	was	
He/She/It	was	studying.
hYou/We/They	were	

a
r
d

w

Вопрос

Was	I	
Was	he/she/it	studying?
Were	you/we/they	

Отрицание

	Полная форма	Краткая форма	
I	was not	wasn't	
He/She/It	was not	wasn't	studying.
You/We/They	were not	weren't	

Употребление

Past Continuous употребляется для выражения:

- временного действия, продолжавшегося в прошлом в момент, о котором мы говорим. Мы не знаем, когда началось и когда закончилось это действие,
At three o'clock yesterday afternoon Mike and his son **were washing** the dog. (Мы не знаем, когда они начали и когда закончили мыть собаку.)
- временного действия, продолжавшегося в прошлом (longer action) в момент, когда произошло другое действие (shorter action). Для выражения второго действия мы употребляем past simple, **He was reading** a newspaper **when** his wife **came**. (was reading = longer action; came = shorter action)
- двух и более временных действий, одновременно продолжавшихся в прошлом.
The people **were watching while** the cowboy **was riding** the bull.
- Past Continuous употребляется также для описания обстановки, на фоне которой происходили события рассказа (повествования).
The sun **was shining** and the birds **were singing**. Tom **was driving** his old truck through the forest.

Правописание

- В глаголах, оканчивающихся на **-e**, обычно опускается **-e** и прибавляется **-ing**.
dance – dancing, **НО** agree - agreeing
- В глаголах, оканчивающихся на **ударный слог с кратким гласным** между двумя согласными, конечная согласная буква удваивается и прибавляется **-ing**.
refer – referring, run – running, get – getting, **НО** open - opening
- В глаголах, оканчивающихся на **-l**, эта буква **l** удваивается и прибавляется **-ing**.
travel - travelling
- В глаголах, оканчивающихся на **-ie**, опускается **-ie** и прибавляется **-y + -ing**.
lie – lying, die - dying

Маркеры

Маркерами Past Continuous являются: *while, when, as, all day/night/morning* и т.д.

- when/while/as + past continuous (longer action)
- when + past simple (shorter action)

Past Continuous: exercises

6.1 What were you doing at the following times? Write one sentence as in the examples. The past continuous is not always necessary (see the second example).

1. (at 8 o'clock yesterday evening)
I was having dinner with some friends.
2. (at 5 o'clock last Saturday)
I was on a train on my way to London.
3. (at 10.15 yesterday morning)
4. (at 4.30 this morning)
5. (at 7.45 yesterday evening)
6. (half an hour ago)

6.2 Use your own ideas to complete these sentences. Use the past continuous.

1. Tom burnt his hand while he was cooking the dinner.
2. The doorbell rang while I ---
3. We saw an accident while we ---
4. Mary fell asleep while she ---
5. The television was on but nobody ---

6.3 Put the verbs into the correct form, past continuous or past simple.

1. I saw (see) Sue in town yesterday but she --- (look) the other way.
2. I --- (meet) Tom and Ann at the airport a few weeks ago. They --- (go) to Berlin and I --- (go) to Madrid. We --- (have) a chat while we --- (wait) for our flights.
3. I --- (cycle) home yesterday when suddenly a man --- (step) out into the road in front of me. I --- (go) quite fast but luckily I --- (manage) to stop in time and --- (not/hit) him.

6.4 Put the verbs into the correct form, past continuous or past simple.

1. Jane was waiting (wait) for me when I arrived (arrive).
2. 'What --- (you/do) this time yesterday?' 'I was asleep.'
3. '--- (you/go) out last night?' 'No, I was too tired.'
4. 'Was Carol at the party last night?' 'Yes, she --- (wear) a really nice dress.'
5. How fast --- (you/drive) when the accident --- (happen)?
6. John --- (take) a photograph of me while I --- (not/look).
7. We were in a very difficult position. We --- (not/know) what to do.
8. I haven't seen Alan for ages. When I last --- (see) him, he --- (try) to find a job in London.
9. I --- (walk) along the street when suddenly I --- (hear) footsteps behind me. Somebody --- (follow) me. I was frightened and I --- (start) to run.
10. When I was young, I --- (want) to be a bus driver.

Unit 7: Сопоставление Past Continuous и Past Simple

Past Continuous

Past Continuous употребляется для выражения:

- временного действия, продолжавшегося в прошлом в момент, о котором мы говорим,

At nine o'clock yesterday morning, the plane **was flying** to Tahiti from New York. (Мы не знаем, когда начался полет и когда он закончился.)

Past Simple

Past Simple употребляется для выражения:

- действия, которое произошло (завершилось) в прошлом в установленное время, The plane **landed** at the airport at eight o'clock yesterday morning. (Время установлено. Действие завершилось. Самолет приземлился.)
- действий, следовавших непосредственно одно за другим в прошлом.

- двух временных действий, одновременно продолжавшихся в прошлом. First she **read** the advertisement and then she **called** the company.
- He **was listening** carefully while they **were explaining** the plan to him.

Past Simple or Past Continuous: exercises

7.1 Put the verbs in brackets into past simple or past continuous. Which is the longer action in each sentence?

1. As I*was doing*.....(do) the washing-up, I*broke*..... (break) a glass. “*Doing the washing-up is the longer action.*”
2. We (walk) in the woods when the storm (begin).
3. John (repair) his motor bike when his mother(arrive).
4. I (eat) my lunch when the phone (ring).
5. He(ride) his bicycle to school when he(drop) his bag.
6. We (see) a bad accident as we (drive) to the airport.
7. Tom (watch) the match when the TV (break down).
8. We (talk) when she (come) into the room.

7.2 Put the verbs into the correct form, past continuous or past simple.

<p>1. I<i>saw</i>.... (was seeing/saw) Sue in town yesterday but she (wasn't seeing/ didn't see) me. She (was looking/ looked) the other way.</p>	<p>2. I(was meeting/ met) Tom and Ann at the airport a few weeks ago. They (were going/went) to Berlin and I (were going/went) to Madrid. We (were having/ had) a chat while we (were waiting/waited) for our flights.</p>	<p>3. I(was cycling/ cycled) home yesterday when suddenly a man (was stepping/stepped) out into the road in front of me. I..... (was going/went) quite fast but luckily I (was managing/ managed) to stop in time and (wasn't hitting/hit) him.</p>
--	--	---

7.3 Complete these texts using past continuous or past simple of the verbs in brackets.

Beethoven*wrote*.... (write) nine symphonies, he*was writing*.... (write) another symphony when he died.

1. Last Saturday Tom wanted to make two salads. He (make) the first one in five minutes. He (make) the second one when his guests (arrive), and they (help) him to finish it.
2. The artist Gaudi (design) several houses in Barcelona, Spain. Later he (start) work on a church. He (work) on the church when he (die).

3. Last month a bank robber (escape) while the police (take) him to prison. Later they (catch) him again, and this time they (lock) him up without any problem.
4. Philip's football team were lucky last Saturday. After twenty minutes they (lose), but in the end they (win) the game by four goals to two.
5. John Lennon (sing) and (play) on many records with the Beatles. After that he (record) several songs without the Beatles. He (prepare) a new record when Mark Chapman (shoot) him.
6. The evening was getting darker; the street lights (come) on. People (hurry) home after work. I (stand) in a queue at the bus stop. Suddenly somebody (grab) my bag.

Unit 8: Present Perfect – настоящее совершенное время

Образование

Настоящее совершенное время образуется с помощью вспомогательного глагола *have/has* и *причастия прошедшего времени* (past participle). Причастие прошедшего времени правильных глаголов образуется путем добавления к глаголу окончания – *ed*. Например: *play – played*.

Причастие прошедшего времени неправильных глаголов образуется иначе. Например: *see – seen*. (Смотрите список неправильных глаголов.)

Вопросы строятся путем постановки *have/has* перед подлежащим. Например: *Have they read the book?* Отрицания строятся путем постановки *not* между *have/has* и *причастием прошедшего времени*. Например: *He has not/hasn't repaired the TV yet.*

Утверждение

	Полная форма	Краткая форма	
I	have	've	
He/She/It	has	's	finished/left.
You/We/They	have	've	

Вопрос

Have	I	
Has	he/she/it	finished/left?
Have	you/we/they	

Отрицание

	Полная форма	Краткая форма	
I	have not	haven't	
He/She/It	has not	hasn't	finished/left.
You/We/They	have not	haven't	

Употребление

Present Perfect употребляется для выражения:

- действий, которые произошли в прошлом в неопределенное время. Конкретное время действия не важно, важен результат,
Kim **has bought** a new mobile phone. (Когда она его купила? Мы это не уточняем, поскольку это не важно. Важно то, что у нее есть новый мобильный телефон.)
- действий, которые начались в прошлом и все еще продолжаются в настоящем,
He **has been** a car salesman since 1990. (Он стал продавцом автомобилей в 1990 году и до сих пор им является.)
- действий, которые завершились совсем недавно и их результаты все еще ощущаются а настоящим.
They **have done** their shopping. (Мы видим, что они только что сделали покупки, поскольку они выходят из супермаркета с полной тележкой.)
- Present Perfect употребляется также со словами *today, this morning/afternoon* и т.д., когда обозначенное ими время в момент речи еще не истекло.
He **has made** ten pots *this morning*. (Сейчас утро. Указанное время не истекло.)

Маркеры

Маркерами Present Perfect являются: *for, since, already, just, always, recently, ever, how long, yet, lately, never, so far, today, this morning/afternoon/week/month/year* и т.д.

В утверждениях

- for: I have known them **for** six years.
- since: She has been ill **since** Monday.
- already: We have **already** eaten our lunch.
- just: I have **just** posted the letter.
- always: She has **always** wanted to travel abroad.
- recently: He has **recently** published a book.

В вопросах

- ever: Have you **ever** met anybody famous?
- how long: **How long** have you lived here?
- yet: Has Paul left **yet**?
- lately: Have you seen any good films **lately**?

В отрицаниях

- for: I haven't talked to him **for** days.
- since: They haven't been abroad **since** 1990.
- yet: She hasn't answered my letter **yet**.
- lately: I haven't seen John **lately**.
- never: They have **never** worked abroad.

Present Perfect: exercises

8.1 You are writing a letter to a friend. In the letter you give news about yourself and other people.

Use the words given to make sentences. Use the present perfect.

Dear Chris,

Lots of things have happened since I last wrote to you.

1. I/buy/a new car
I've bought a new car.
2. my father/start/a new job
3. I/give up/smoking
4. Charles and Sarah/go/to Brazil
5. Suzanne/have/a baby

8.2 Read the situations and write sentences. Choose one of the following:

arrive break go up grow improve lose

1. Mike is looking for his key. He can't find it. He has lost his key.
2. Margaret can't walk and her leg is in plaster. She ---
3. Maria's English wasn't very good. Now it is much better. ---
4. Tim didn't have a beard last month. Now he has a beard. ---
5. This morning I was expecting a letter. Now I have it. ---
6. Last week the bus fare was 80 pence. Now it is 90. ---

8.3 Complete Bs sentences. Use the verb in brackets + just/already/yet (as shown).

1. A: Would you like something to eat?
B: No, thanks. I've just had lunch. (just/have)
2. A: Do you know where Julia is?
B: Yes, I --- her. (just/see)
3. A: What time is David leaving?
B: He --- (already/leave)
4. A: What's in the newspaper today?
B: I don't know. I --- (not/read/yet)
5. A: Is Ann coming to the cinema with us?
B: No, she --- the film. (already/see)
6. A: Are your friends here yet?
B: Yes, they --- (just/arrive)
7. A: What does Tim think about your plan?
B: I --- (not/tell/yet)

8.4 Read the situations and write sentences with just, already or yet.

1. After lunch you go to see a friend at her house. She says 'Would you like something to eat?'
You say: No, thank you. I've just had lunch. (have lunch)
2. Joe goes out. Five minutes later, the phone rings and the caller says 'Can I speak to Joe?'
You say: I'm afraid --- (go out)
3. You are eating in a restaurant. The waiter thinks you have finished and starts to take your plate away.
You say: Wait a minute! --- (not/finish)
4. You are going to a restaurant this evening. You phone to reserve a table. Later your friend says 'Shall I phone to reserve a table?'
You say: No --- it. (do)
5. You know that a friend of yours is looking for a job. Perhaps she has been successful. Ask her.
You say: ---? (find)
6. Ann went to the bank, but a few minutes ago she returned. Somebody asks 'Is Ann still at the bank?'

You say: No, --- (come back)

8.5 Put in been or gone.

1. Jim is on holiday. He's gone to Italy.
2. Hello! I've just --- to the shops. I've bought lots of things.
3. Alice isn't here at the moment. She's --- to the shop to get a newspaper.
4. Tom has. --- out. He'll be back in about an hour.
5. 'Are you going to the bank?' 'No, I've already --- to the bank.'

Unit 9: Сопоставление Past Simple и Present Perfect

Past Simple

Мы употребляем Past Simple для выражения действия, которое:

- произошло в прошлом в указанное время,

Ed Prior **won** his first gold medal in 1992. (Когда? В 1992 году. Время указано.)

- началось и закончилось в прошлом.

Annette had a cold for two days. (Она больше не простужена.)

Present Perfect

Мы употребляем Present Perfect для выражения действия, которое:

- произошло в прошлом в неопределенное время,

Ed Prior has won a lot of medals. (Когда? Мы не знаем. Время не указано.)

- началось в прошлом и продолжается сейчас.

Lucy has had a cold for two days. (Она до сих пор простужена.)

Past Simple or Present Perfect: exercises

9.1 What has happened in these situations?

1. Jack had a beard. Now he hasn't got a beard. He has shaved off his beard.
2. Linda was here five minutes ago. Now she's in bed. She ---
3. The temperature was 25 degrees. Now it is only 17. The temperature ---
4. The light was off. Now it is on. Somebody ---
5. The tree was only three metres high. Now it is four. The tree ---
6. The plane was on the runway a few minutes ago. Now it is in the air.
The plane ---

9.2 Put the verbs in brackets in the correct form, present perfect or past simple.

1. 'Where's your key?' 'I don't know. I've lost it.' (lose)
2. I was very tired, so I lay down on the bed and went to sleep. (be)
3. Mary --- to Australia for a while but she's back again now. (go)
4. 'Where's Ken?' 'He --- out. He'll be back in about an hour.' (go)
5. I did German at school but I --- most of it. (forget)
6. I meant to phone Diane last night but I --- (forget)
7. I --- a headache earlier but I feel fine now. (have)
8. Look! There's an ambulance over there. There --- an accident. (be)
9. They're still building the new road. They --- it. (not/finish)

10. 'Is Helen still here?' 'No, she --- out.' (just/go)
11. The police --- three people but later they let them go. (arrest)
12. Ann --- me her address but I'm afraid I --- it. (give, lose)
13. Where's my bike? It --- outside the house. It --- (be, disappear)
14. What do you think of my English? Do you think I ---? (improve)

9.3 Are the underlined parts of these sentences right or wrong? Correct the ones that are wrong.

1. Do you know about Sue? She's given up her job. RIGHT
2. The Chinese have invented printing. WRONG: The Chinese invented
3. How many plays has Shakespeare written? ---
4. Have you read any of Shakespeare's plays? ---
5. Aristotle has been a Greek philosopher. ---
6. Ow! I've cut my finger. It's bleeding. ---
7. My grandparents have got married in London. ---
8. Where have you been born? ---
9. Mary isn't at home. She's gone shopping. ---
10. Albert Einstein has been the scientist who has developed the theory of relativity. ---

9.4 (Section C) Put the verb into the most suitable form, present perfect or past simple.

1. A: Look! Somebody has split (spill) coffee on the carpet.
B: Well, it wasn't (not/be) me. I didn't do (not/do) it.
2. A: Ben --- (break) his leg.
B: Really? How --- (that/happen)?
A: He --- (fall) off a ladder.
3. A: Your hair looks nice. --- (you/have) a haircut?
B: Yes.
A: Who --- (cut) it? --- (you/go) to the hairdresser?
B: No, a friend of mine --- (do) it for me.

9.5 Are the underlined parts of these sentences right or wrong? Correct the ones that are wrong.

1. I've lost my key. I can't find it anywhere. RIGHT
2. Have you seen the news on television last night? WRONG: Did you see
3. I've bought a new car. Do you want to see it? ---
4. I've bought a new car last week. ---
5. Where have you been yesterday evening? ---
6. Jenny has left school in 1991. ---
7. I'm looking for Mike. Have you seen him? ---

8. I'm very hungry. _I haven't eaten_ anything today. ---

9. Diane _hasn't been_ at work yesterday. ---

10. When _has this book been_ published? ---

9.6 Make sentences from the words in brackets. Use the present perfect or past simple.

1. (it/not/rain/this week) It hasn't rained this week.

2. (the weather/be/cold/recently) The weather ---

3. (it cold/last week) It ---

4. (I not/read/a newspaper yesterday) I ---

5. (I not/read/a newspaper today)

6. (Ann/earn/a lot of money/this year)

7. (she not/earn/so much/last year)

8. (you have/a holiday recently?)

9.7 Put the verb into the correct form, present perfect or past simple.

1. I don't know where Amy is. Have you seen (you/see) her?

2. When I --- (get) home last night, I --- (be) very tired and I --- (go) straight to bed.

3. Your car looks very clean --- (you/wash) it?

4. George --- (not/be) very well last week.

5. Mr Clark --- (work) in a bank for 15 years. Then he gave it up.

6. Molly lives in Dublin. She --- (live) there all her life.

7 --- (you/go) to the cinema last night?' 'Yes, but it --- (be) a mistake. The film (be) awful.

8. My grandfather --- (die) 30 years ago. I --- (never/meet) him.

9. I don't know Carol's husband. I --- (never/meet/him).

10. A: Is your father at home?

B: No, I'm afraid he --- (go) out.

A: When exactly --- (he/go) out? B: About ten minutes ago.

11. A: Where do you live?

B: In Boston.

A: How long --- (you/live) there?

B: Five years.

A: Where --- (you/live) before that?

B: In Chicago.

A: And how long --- (you/live) in Chicago?

B: Two years.

9.8 Write sentences about yourself using the ideas in brackets.

1. (something you haven't done today)

I haven't eaten any fruit today.

2. (something you haven't done today)

3. (something you didn't do yesterday)

4. (something you did yesterday evening)

5. (something you haven't done recently)

6. (something you've done a lot recently)

Unit 10: Future Simple – будущее простое время

Образование

Будущее простое время образуется с помощью *will* и *инфинитива без частицы to*. *Will* используется для всех лиц. Вопросы образуются путем постановки *will* перед подлежащим. В отрицаниях после *will* ставится *not*.

Утверждение

	Полная форма	Краткая форма	
I	will	'll	
He/She/It	will	'll	phone.
You/We/They	will	'll	

Вопрос

Will	I	
Will	he/she/it	phone?
Will	you/we/they	

Отрицание

	Полная форма	Краткая форма	
I	will not	won't	
He/She/It	will not	won't	phone.
You/We/They	will not	won't	

Употребление

Future simple употребляется:

- для обозначения будущих действий, которые, возможно, произойдут, а возможно, и нет, **We'll visit** Disney World one day.
- для предсказаний будущих событий (predictions), **Life will be** better fifty years from now.
- для выражения угроз или предупреждений (threats/warnings), **Stop or I'll shoot**.
- для выражения обещаний (promises) и решений, принятых в момент речи (on-the-spot decisions), **I'll help** you with your homework.

- с глаголами *hope, think, believe, expect* и т.п., с выражениями *I'm sure, I'm afraid* и т.п., а также с наречиями *probably, perhaps* и т.п.
I **think** he **will** support me.
He **will probably** go to work.

Маркеры

Маркерами Future Simple являются: *tomorrow, the day after tomorrow, next week/month/year, tonight, soon, in a week/month/year* и т.д.

Примечание: Future Simple не употребляется после слов *while, before, until, as soon as, after, if* и *when* в придаточных предложениях условия и времени. В таких случаях используется Present Simple.

Например: I'll make a phone call **while** I **wait** for you. Please phone me **when** you **finish** work.

В дополнительных придаточных предложениях после «when» и «if» возможно употребление Future Simple.

Например: I don't know **when/if** Helen **will** be back.

Future Simple: exercises

10.1. What will life be like in 50 years? Make sentences using will or won't.

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1. People/live longer. | + |
| People <i>will live</i> longer. | |
| 2. Robots/do most of the work. | + |
| 3. People/use electric cars. | - |
| 4. Pollution/disappear. | + |
| 5. People/die of serious diseases. | - |
| 6. Children/stop going to school. | - |
| 7. People/go on holiday to the moon. | + |

10.2 Put in will ('ll) or won't.

1. Can you wait for me? I won't be very long.
2. There's no need to take an umbrella with you. It --- rain.
3. If you don't eat anything now, you --- be hungry later.
4. I'm sorry about what happened yesterday. It --- happen again.
5. I've got some incredible news! You --- never believe what's happened.
6. Don't ask Margaret for advice. She --- know what to do.

10.3 Complete the sentences with I'll + a suitable verb (get, go, do, switch, have, show, send, stay, give).

1. "I'm too tired to walk home. I thinkI'll get..... a taxi."
2. "It's a bit cold in this room." – "Is it? on the heating then."

3. "We haven't got any milk." – "Oh, haven't we? and get some."
4. "Do you want me to do the washing-up?" – "No, it's all right. it."
5. "I don't know how to use this computer." – "OK, you."
6. "Would you like tea or coffee?" – "..... coffee, please."
7. "Goodbye! Have a nice holiday." – "Thanks. you a postcard."
8. "Thank you for lending me your camera. it back to you on Monday, OK?"
9. "Are you coming with us?" – "No, I think here."

10.4. Use the verbs in the box with *will* or *won't* to complete these dialogues.

<i>have</i>	<i>take</i>	<i>phone</i>	<i>finish</i>	<i>be</i>	<i>be</i>	<i>win</i>	<i>make</i>
-------------	-------------	--------------	---------------	-----------	-----------	------------	-------------

A: Are you coming to the cinema on Sunday?

B: I'm not sure. I *will phone* you on Saturday.

1. A: Don't change your clothes now. We late.

B: No, we won't. We a taxi.

2. A: George is going to have a party at the weekend.

B: Why?

A: It's his birthday. He thirty on Saturday.

3. A: She the tennis match tomorrow.

B: Why not?

A: She mistakes. She always makes mistakes in important matches.

4. A: Steve the work tonight?

B: No, he won't finish. He time.

10.5 Complete the sentences with *will* ('ll) + one of these verbs:

be be come get like look meet pass

1. Don't worry about your exam. I'm sure you I'll pass.

2. Why don't you try on this jacket? It --- nice on you.

3. You must meet George sometime. I think you --- him.

4. It's raining. Don't go out. You --- wet.

5. They've invited me to their house. They --- offended if I don't go.

6. Goodbye. I expect we --- again before long.

7. I've invited Sue to the party but I don't think she ---.

8. I wonder where I --- 20 years from now.

10.6 Write questions using *do you think ... will ...?* + one of these verbs:

be back cost finish get married happen like rain

1. I've bought Mary a present. Do you think she'll like it?
2. The weather doesn't look very good. Do you ---
3. The meeting is still going on. When do you ---
4. My car needs to be repaired. How much ---
5. Sally and David are in love. Do ---
6. 'I'm going out now.' 'OK. What time ---'
7. The future situation is uncertain. What ---

Will/Shall: exercises

Мы употребляем:

◆ **Will you...?,** когда просим сделать что-нибудь для нас (**request**),

Например: **Will you** post these letters for me, please? (=Can you post these letters for me, please?)

◆ **Shall I...?,** когда предлагаем сделать что-нибудь для кого-то (**offer**),

Например: **Shall I** help you clean your room? (=Do you want me to help you clean your room?)

◆ **Shall we...?,** когда предлагаем кому-то сделать что-либо вместе (**suggestion**).

Например: **Shall we** go to the theatre tonight? (=Why don't we go to the theatre tonight?)

10.4 Ask questions using the prompts, as in the example.

1. The garden is very untidy. (I/cut/the grass)
Shall I cut the grass?
2. It's a lovely evening. (we/go for/a walk)
3. I need a hot drink. (I/make/some tea)
4. It's very quiet in here. (I/turn on/ the radio)
5. The Smiths are back. (we/visit/them)
6. I've cut my finger. (I/get/a plaster)

10.5. Put *Shall I* or *Shall we* in the gaps in the dialogues.

1. A: I'm hungry. Are you going to the shops?
B: Yes.*Shall I*.... get you something to eat?
2. A: We need a holiday.
B: What a good idea! go to Florida?
3. A: I'm going to get some tickets for the concert next week. buy you one?
B: Yes, please. I'd love to come.
4. A: go to a restaurant tonight?
B: OK, but I don't have any money. Will you pay for me?
5. A: I want to go to Italian classes, but I've never learnt a foreign language before.
B: come with you?
A: That's very kind of you.

6. A: Where is your meeting?
 B: At John's office on Baker Street.
 A: walk or take a taxi?
7. A: You look thirsty. get you a drink?
 B: Yes, please. Can I have an orange juice or some water?
8. A: It's a beautiful day! have a picnic?
 B: Wonderful idea! Who shall we invite?

Unit 11: Be Going To

Образование

Утверждение

	Полная форма	Краткая форма	
I	am	'm	
He/She/It	is	's	going to leave.
You/We/They	are	're	

Вопрос

Am	I		
Is	he/she/it	going to leave?	
Are	you/we/they		

Отрицание

	Полная форма	Краткая форма	
I	am not	'm not	
He/She/It	is not	isn't	going to leave.
You/We/They	are not	aren't	

Употребление

Be going to употребляется для:

- выражения заранее принятых планов и намерений на будущее,
 Bob **is going to drive** to Manchester tomorrow morning.
- предсказаний, когда уже есть доказательства того, что они сбудутся в близком будущем.
 Look at that tree. It **is going to fall down**.

Be Going To: exercises

11.1 Answer the questions. You are going to do all these things but you haven't done them yet. Use going to and the word(s) in brackets.

1. Have you cleaned the car? (tomorrow) Not yet. I'm going to clean it tomorrow.
2. Have you phoned Sally? (later) Not yet. ---

3. Have you done the shopping? (this afternoon) Not yet. ---
4. Have you read the paper? (after dinner) Not ---
5. Have you had dinner? (just) ---

11.2 Write a question with going to for each situation.

1. Your friend has won some money. You ask:
(what/do with it?) What are you going to do with it?
2. Your friend is going to a party tonight. You ask:
(what/wear?)
3. Your friend has just bought a new table. You ask:
(where/put it?)
4. Your friend has decided to have a party. You ask:
(who/invite?)

11.3 Read the situations and complete the dialogues. Use going to.

1. You have decided to write some letters this evening.
FRIEND: Are you going out this evening? You: No, I'm going to write some letters.
2. You are a smoker but you have decided to give it up soon.
FRIEND: Smoking is very bad for you.
YOU: I know. ---
3. You have been offered a job but you have decided not to take it.
FRIEND: I hear you've been offered a job.
YOU: That's right, but ---
4. You are in a restaurant. The food is awful and you've decided to complain.
FRIEND: This food is awful, isn't it?
YOU: Yes, it's disgusting. ---

11.4 What is going to happen in these situations? Use the words in brackets.

1. There are a lot of black clouds in the sky. (rain) It's going to rain.
2. It is 8.30. Jack is leaving his house. He has to be at work at 8.45 but the journey takes 30 minutes.
(late) He ---
3. There is a hole in the bottom of the boat. A lot of water is coming in through the hole. (sink) The boat ---
4. Emma is driving. There is very little petrol left in the tank. The nearest petrol station is a long way away. (run out) She ---

11.5 Complete the sentences with was/were going to + one of these verbs:

give up have phone play travel

1. We were going to travel by train but then we decided to go by car instead.
2. We --- tennis yesterday but it rained all day.
3. I --- Jim, but I decided to write him a letter instead.
4. When I last saw Tim, he --- his job but in the end he decided not to.
5. We --- a party last week but some of our friends couldn't come, so we cancelled it.

Unit 12: The Passive – страдательный залог

Образование

Страдательный залог образуется с помощью глагола *to be* и причастия прошедшего времени (past participle) смыслового глагола.

to be + past participle (pp)

- Временные формы страдательного залога:

<i>Present Simple:</i>	am/is/are + pp
The office is cleaned twice a week.	
<i>Present Continuous:</i>	am/is/are being + pp
The office is being cleaned now.	
<i>Past Simple:</i>	was/were + pp
The office was cleaned last week.	
<i>Past Continuous:</i>	was/were being + pp
The office was being cleaned when the boss arrived.	
<i>Present Perfect:</i>	have/has been + pp
The office has not been cleaned yet.	
<i>Past Perfect:</i>	had been + pp
The office had been cleaned by two o'clock.	
<i>Future Simple:</i>	will be + pp
The office will be cleaned tomorrow.	

- В вопросах *to be* ставится перед подлежащим. Например: **Is your car being serviced?**
- Отрицания образуются с помощью *not*. Например: The furniture **has not been delivered** yet.
- Инфинитив в форме страдательного залога:

to be + past participle

Например: He wants **to be told** the truth.

- Модальные глаголы в страдательном залоге:

modal verb + be + past participle
--

Например: The roof of the house **must be repaired**.

Употребление

Мы употребляем страдательный залог, когда хотим показать, что само действие важнее, чем лицо, которое его совершает.

The missing climber **was found** yesterday. (Не важно, кто именно нашел потерявшегося альпиниста, важно, что его нашли.)

- Лицо, совершающее действие («агент» действия), вводится предлогом *by* и упоминается лишь тогда, когда это важно или необходимо.

Australia **was discovered by Captain Cook**. (by Captain Cook – личность «агента» действия важна)

- «Агент» действия не упоминается, когда:

а) он неизвестен,

Jim's car **was stolen** last night. (Мы не знаем, кто украл его машину.)

б) это не важно,

Champagne **is made** in France. («Агент» действия не важен.)

в) он очевиден.

The bank robbers **are being chased**. (Ясно, что их преследует полиция.)

The Passive: exercises

12.1 Complete the sentences using one of these verbs in the correct form:

cause damage hold include invite make overtake show translate write

1. Many accidents are caused by dangerous driving.
2. Cheese --- from milk.
3. The roof of the building --- in a storm a few days ago.
4. There's no need to leave a tip. Service --- in the bill.
5. You --- to the wedding. Why didn't you go?
6. A cinema is a place where films ---
7. In the United States, elections for President --- every four years.
8. Originally the book --- in Spanish and a few years ago it
9. We were driving along quite fast but we --- by lots of other cars.

12.2 Write questions using the passive. Some are present and some are past.

1. Ask about the telephone. (when/invent?)
When was the telephone invented?
2. Ask about glass. (how/make?) How ---
3. Ask about Australia. (when/discover?)
4. Ask about silver. (what/use for?)
5. Ask about television. (when/invent?)

12.3 Put the verb into the correct form, present simple or past simple, active or passive.

1. It's a big factory. Five hundred people are employed (employ) there.
2. Water --- (cover) most of the Earth's surface.
3. Most of the Earth's surface --- (cover) by water.

4. The park gates --- (lock) at 6.30 p.m. every evening.
5. The letter --- (post) a week ago and it --- (arrive) yesterday.
6. The boat --- (sink) quickly but fortunately everybody --- (rescue).
7. Ron's parents --- (die) when he was very young. He and his sister --- (bring) up by their grandparents.
8. I was born in London but I --- (grow) up in the north of England.
9. While I was on holiday, my camera --- (steal) from my hotel room.
10. While I was on holiday, my camera --- (disappear) from my hotel room.
11. Why --- (Sue/resign) from her job? Didn't she enjoy it?
12. Why --- (Bill/sack) from his job? What did he do wrong?
13. The company is not independent. It --- (own) by a much larger company.
14. I saw an accident last night. Somebody --- (call) an ambulance but nobody --- (injure) so the ambulance --- (not/need).
15. Where --- (these photographs/take)? In London? --- (you/take) them?

12.4 Rewrite these sentences. Instead of using 'somebody/they/people' etc. write a passive sentence.

1. Somebody cleans the room every day. _The room is cleaned every day._
2. They cancelled all flights because of fog. All ---
3. People don't use this road very often. ---
4. Somebody accused me of stealing money. I ---
5. How do people learn languages? How ---
6. People advised us not to go out alone. ---

12.5 Rewrite these sentences. Instead of using 'somebody' or 'they', write a passive sentence.

1. Somebody has cleaned the room. _The room has been cleaned._
2. They have postponed the concert. The ---
3. Somebody is using the computer at the moment. The computer ---
4. I didn't realise that somebody was recording our conversation. I didn't realise that ---
5. When we got to the stadium we found that they had cancelled the game. When we got to the stadium, we found that ---
6. They are building a new ring road round the city. ---
7. They have built a new hospital near the airport. ---

12.6 When were they born? Choose five of these people and write a sentence for each. (Two of them were born in the same year.)

Beethoven Galileo Elvis Presley 1452 1869 1929

Agatha Christie Mahatma Gandhi Leonardo da Vinci 1564 1891 1935

Walt Disney Martin Luther King William Shakespeare 1770 1901

1. _Walt Disney was born in 1901._
2. ---
3. ---
4. ---
5. ---
6. ---
7. And you? I ---

12.7. Put the verb into the correct form, *present simple* or *past simple*, *active* or *passive*.

1. It's a big factory. Five hundred people *are employed*.... (employ) there.
2. Water (cover) most of the Earth's surface.
3. Most of the Earth's surface (cover) by water.
4. The park gates (lock) at 6.30 p.m. every evening.
5. The letter (post) a week ago and it (arrive) yesterday.
6. The boat (sink) quickly but fortunately everybody (rescue).
7. Ron's parents (die) when he was very young. He and his sister (bring) up by their grandparents.
8. I was born in London but I (grow) up in the north of England.
9. While I was on holiday, my camera (steal) from my hotel room.
10. While I was on holiday, my camera (disappear) from my hotel room.
11. Why (Sue/resign) from her job? Didn't she enjoy it?
12. Why (Bill/sack) from his job? What did he do wrong?
13. The company is not independent. It (own) by a much larger company.
14. I saw an accident last night. Somebody (call) an ambulance but nobody (injure), so the ambulance (not/need).

Tenses

The Active Voice

	Present	Past	Future
	V/V-s	V-ed/V(2)	will/shall+V
Simple	I write letters to my mother every day.	I wrote two letters yesterday.	I will write it tomorrow.

Continuous	<p>am/is/are+V-ing</p> <p>I am writing a letter (now).</p>	<p>was/were+V-ing</p> <p>I was writing a letter when you called.</p>	<p>will/shall be+V-ing</p> <p>I will be writing letters at 5 o'clock.</p>
Perfect	<p>have/has+V(3)</p> <p>I have already written 5 letters.</p>	<p>had+V(3)</p> <p>I had written 5 letters by the time you came.</p>	<p>will/shall have+V(3)</p> <p>I will have written the letters by noon.</p>

The Passive Voice

	Present	Past	Future
Simple	<p>am/is/are+V(3)</p> <p>The letters are written every week.</p>	<p>was/were+V(3)</p> <p>The letters were written last week.</p>	<p>will be+V(3)</p> <p>The letter will be written next week.</p>
Continuous	<p>am/is/are being+V(3)</p> <p>The letters are being written at this moment.</p>	<p>was/were being+V(3)</p> <p>The letters were being written at 5 o'clock yesterday.</p>	<p>—</p>
Perfect	<p>have/has been+V(3)</p> <p>The letters have already been written.</p>	<p>had been+V(3)</p> <p>The letters had been written by 5 o'clock.</p>	<p>will have been+V(3)</p> <p>The letters will have been written by noon.</p>