



Негосударственное частное образовательное учреждение
высшего образования
«Технический университет УГМК»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ОРГАНИЗАЦИИ И
ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО
ДИСЦИПЛИНЕ**

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

| | |
|-------------------------------------|---|
| Специальность | <u>21.05.04 Горное дело</u> |
| Направленность (профиль) | <u>Подземная разработка рудных месторождений</u> |
| Уровень высшего образования | <u>Специалитет</u> <i>(бакалавриат, специалитет, магистратура)</i> |

Автор - разработчик: Зубов В.В., канд. техн. наук, доцент

Рассмотрено на заседании кафедры механики и автоматизации технологических процессов и производств

Одобрено Методическим советом университета 30 июня 2021 г., протокол № 4

г. Верхняя Пышма
2021

Самостоятельная работа студентов — планируемая учебная работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основная цель самостоятельной работы студентов состоит в овладении фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности.

Задачами организации самостоятельной работы студентов являются:

- Развитие способности работать самостоятельно, формирование самостоятельности мышления и принятия решений.

- Развитие активности и познавательных способностей студентов, развитие исследовательских умений.

- Стимулирование самообразования и самовоспитания.

- Развитие способности планировать и распределять свое время.

Кроме того, эта самостоятельная работа неразрывно связана с формированием компетенций.

Среди функций самостоятельной работы студентов в общей системе обучения выделяют следующие:

- Развивающая (повышение культуры умственного труда, приобщение к творческим видам деятельности, формирование интеллектуальных способностей студентов).

- Информационно-обучающая.

- Стимулирующая (формирование мотивов образования, самообразования).

- Воспитывающая (формирование личностно-профессиональных качеств специалиста).

Виды самостоятельной работы студентов в настоящее время весьма разнообразны и дают широкий выбор для преподавателя.

К ним относятся:

- работа с книжными источниками (учебниками, задачками, с основной и дополнительной рекомендованной литературой);

- работа с электронными источниками (обучающие программы, самоучители и т.п.);

- работа в сети Internet (поиск нужной информации, обработка противоречивой и взаимодополняющей информации; работа со специализированными образовательными сайтами);

- выполнение домашних работ.

Программа дисциплины содержит названия разделов с указанием основных вопросов и разделов каждой темы. Каждая тема является основой вопросов на экзамен. При чтении лекций по курсу преподаватель указывает темы дисциплины, которые выносятся на самостоятельную проработку студентами. Для самоконтроля и приобретения навыков выполнения практических работ по отдельным разделам дисциплины необходимо использовать методические указания к выполнению практических работ.

При освоении указанных тем рекомендуется следующий порядок самостоятельной работы студента.

1. Ознакомьтесь со структурой темы.

2. По учебно-методическим материалам освоите каждый структурный элемент темы.

3. При необходимости используйте дополнительную литературу. Консультацию по использованию дополнительной литературы можно получить у преподавателя.

4. Ответьте на контрольные вопросы и выполните рекомендованные упражнения. При затруднениях в ответах на вопросы вернитесь к изучению рекомендованной в программе литературе.

5. Законспектируйте материал. При этом конспект может быть написан в виде ответов на контрольные вопросы.

6. Выполните практические работы. При затруднении обратитесь за консультацией к преподавателю.

При самостоятельной работе над указанными темами рекомендуется вести записи в конспектах, формируемых на лекционных занятиях по курсу, и в том порядке, в котором данные темы следуют по учебной программе.

Тема 1: РАСТЯЖЕНИЕ

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ №1.

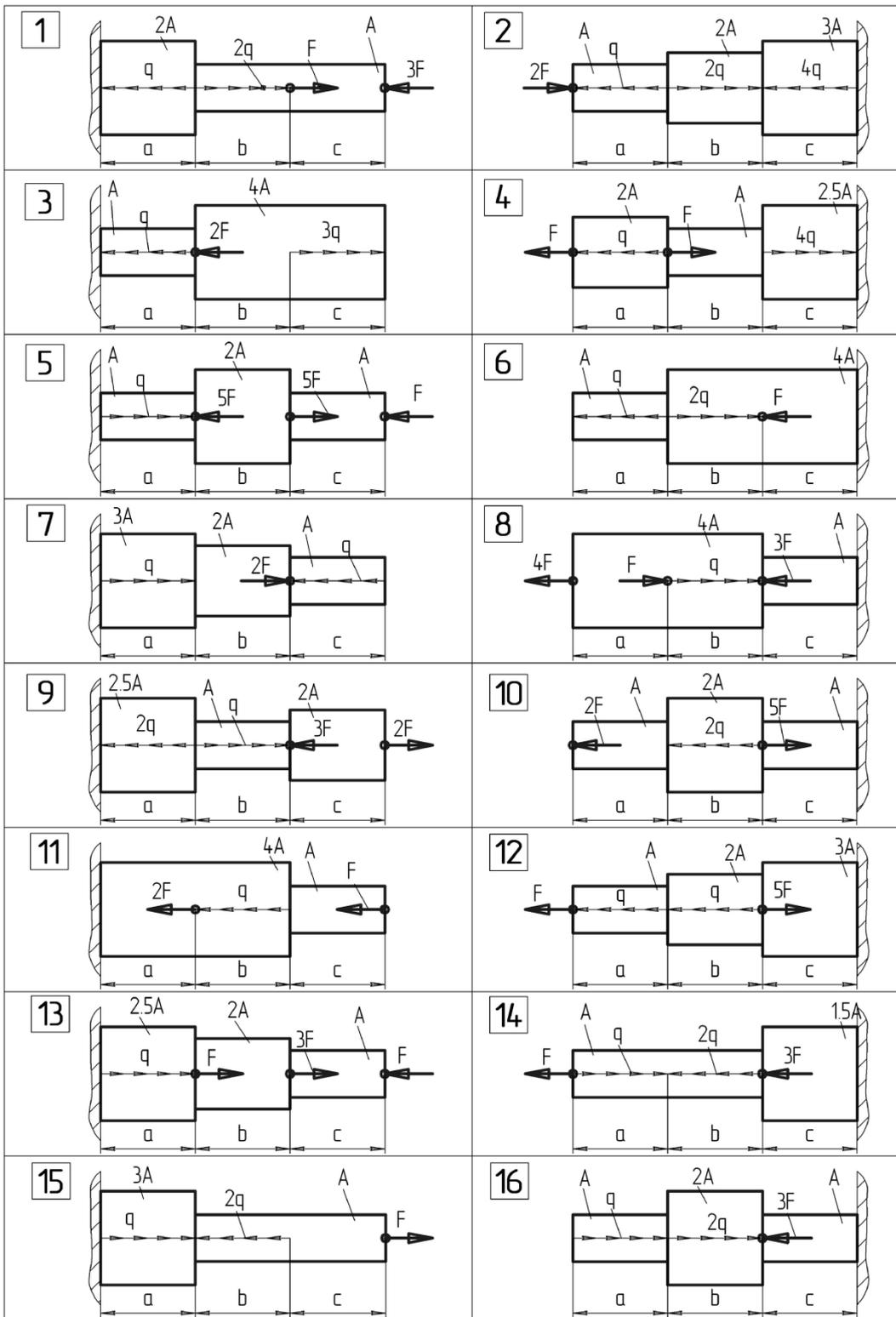
Время на выполнение задания – 3 часа (ОФО), 10 часов (ЗФО).

Тип практического задания – расчетно-графическая работа.

Задание 1. Из условия прочности подобрать поперечное сечение стального ступенчатого стержня в виде прямоугольника с отношением сторон $b/h = 0,25$; округлить полученные в результате расчёта размеры b и h по нормальному ряду размеров. Схема нагружения стержня показана на рис.1. Вычислить напряжение в опасном сечении. Построить эпюры напряжений по высоте опасного сечения. Определить перемещение свободного сечения стержня и построить эпюру перемещений. Данные для расчетов приведены в табл. 1

Таблица 1

| Данные | Вариант | | | | | | | | | |
|------------------|----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| F, кН | 10 | 20 | 20 | 10 | 30 | 20 | 20 | 10 | 30 | 0 |
| q, кН/м | 10 | 10 | 20 | 40 | 30 | 10 | 30 | 40 | 30 | 40 |
| M, кНм | 10 | 30 | 40 | 30 | 10 | 30 | 40 | 30 | 50 | 20 |
| m, кНм/м | 10 | 10 | 20 | 20 | 20 | 10 | 20 | 20 | 10 | 30 |
| a, м | 4 | 3 | 4 | 2 | 4 | 4 | 3 | 5 | 4 | 6 |
| b, м | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| c, м | 3 | 6 | 4 | 6 | 3 | 3 | 4 | 4 | 2 | 4 |
| $[\sigma]$, МПа | 160 | 180 | 200 | 170 | 190 | 160 | 170 | 180 | 190 | 200 |
| $[\tau]$, МПа | 80 | 90 | 100 | 80 | 90 | 100 | 80 | 90 | 100 | 80 |
| E, МПа | $2 \cdot 10^5$ | | | | | | | | | |
| G, МПа | $8 \cdot 10^4$ | | | | | | | | | |



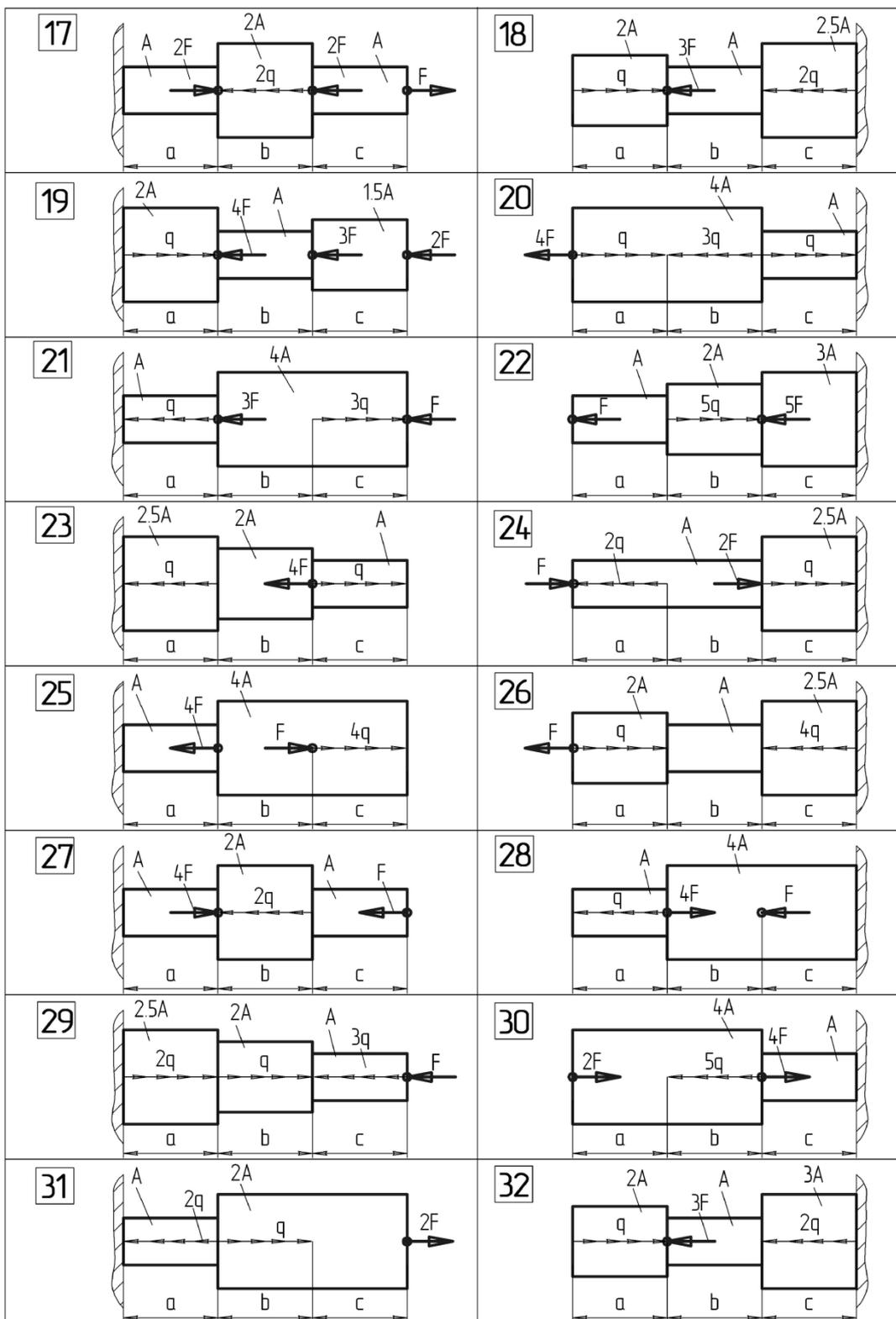


Рис. 1. Схема нагружения стержня

Пример решения задачи 1. Подобрать из условия прочности квадратное поперечное сечение стального ступенчатого стержня. Вычислить напряжение в опасном сечении. Построить эпюры напряжений по высоте опасного сечения и длине стержня. Определить перемещение свободного сечения стержня и построить эпюру перемещений.

При вычислениях принять $F_1 = 10$ кН; $F_2 = 35$ кН; $q = 15 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$; $a = b = 2$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение. 1. Построим эпюру внутренних силовых факторов, т.е. продольных сил N . Для этого разобьём стержень на два характерных участка, начиная от свободного конца. Для определения внутренних силовых факторов применяем метод сечений.

Проведём сечение в пределах первого характерного участка длиной a в произвольном месте и рассмотрим равновесие отсечённой правой части. Продольную силу N_1 в этом сечении найдём, проектируя на ось стержня внешние и внутренние силы, действующие на отсечённую часть стержня.

Для 1-го участка при $0 \leq z_1 \leq a$

$$N_1 = F_1 - qz_1$$

при $z_1 = 0$

$$N_1 = F_1 = 10 \text{ кН};$$

при $z_1 = a$

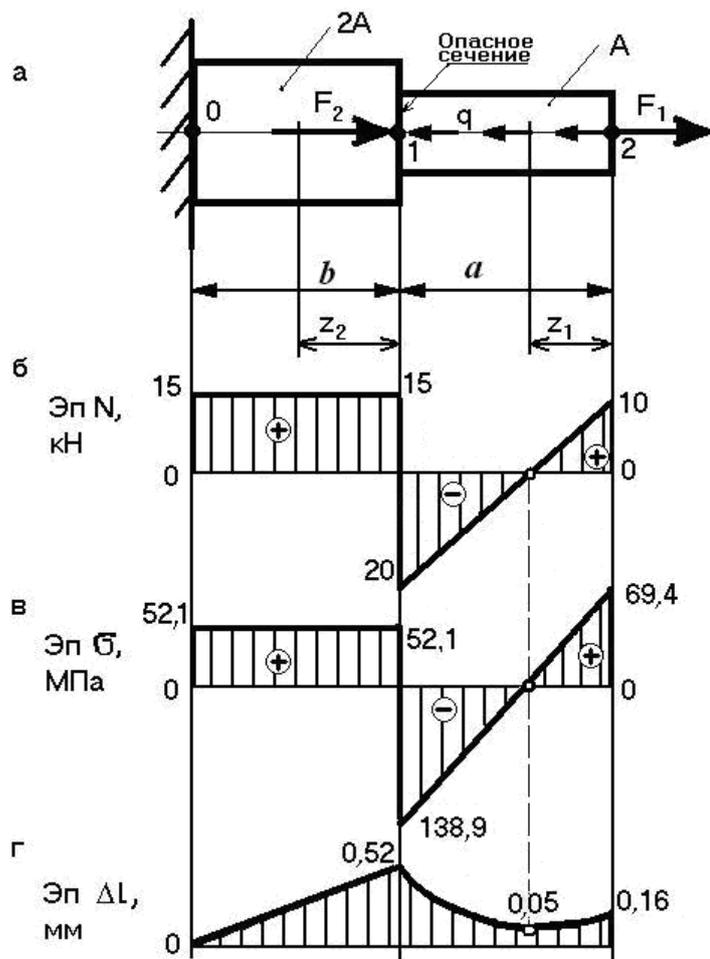
$$N_1 = F_1 - qa = 10 - 15 \cdot 2 = -20 \text{ кН}.$$

Проведём сечение на втором характерном участке длиной b и определим продольную силу N_2

Для 2-го участка при $0 \leq z_2 \leq b$

$$N_2 = F_1 - qa + F_2 = 10 - 15 \cdot 2 + 35 = 15 \text{ кН}.$$

Построим эпюру N . Для этого проводим базу эпюры параллельно оси стержня, откладываем в произвольно выбранном масштабе значения продольных сил N по оси ординат, причём вверх – положительные значения, вниз – отрицательные, и строим графики зависимостей $N=N(z)$. Эпюру заштрихуем линиями, перпендикулярными базе эпюры, проставим значения N и укажем знаки.



Выполним проверку правильности построения эпюры N : на участке, где действует распределённая нагрузка, должна быть наклонная линия, где нет распределённой нагрузки – линия, параллельная базе эпюры. В сечениях стержня, где приложены внешние сосредоточенные силы, на эпюре N должны быть скачки, равные этим силам.

2. Определим положение опасного сечения стержня. Для этого оценим максимальные напряжения по участкам, разделив N_{\max} для каждого участка на соответствующие площади поперечных сечений стержня.

$$\sigma_{\max 1} = \frac{|N_{\max 1}|}{A} = \frac{20}{A}, \quad \sigma_{\max 2} = \frac{|N_{\max 2}|}{2A} = \frac{15}{2A} = \frac{7,5}{A},$$

т. к. $\sigma_{\max 1} > \sigma_{\max 2}$, следовательно, опасное сечение находится на первом участке, где $N = N_{\max 1}$. Укажем место опасного сечения на рисунке, б.

3. Найдём размер квадратного поперечного сечения стержня h с учетом условия прочности в опасном сечении стержня.

Запишем условие прочности.

$$\sigma_{\max 1} = \frac{N_{\max 1}}{A} \leq [\sigma],$$

учитывая, что площадь квадрата $A = h^2$, получим

$$h \geq \sqrt{\frac{|N_{\max 1}|}{[\sigma]}} \geq \sqrt{\frac{20 \cdot 10^3}{160}} \geq 11,18 \text{ мм.}$$

Этот размер следует округлить по нормальному ряду размеров, поэтому принимаем $h = 12$ мм.

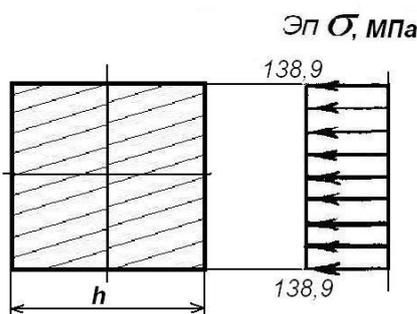
Найдём площади поперечных сечений

$$A = h^2 = 12^2 = 144 \text{ мм}^2; \quad 2A = 2 \cdot 144 = 288 \text{ мм}^2.$$

Вычислим напряжение в опасном сечении стержня

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max 1}}{A} = -\frac{20 \cdot 10^3}{144} = -138,9 \text{ МПа},$$

покажем эпюру σ по высоте сечения (сечение повернуто в плоскость чертежа):



4. Вычислим напряжения ($\sigma = \frac{N}{A}$) и построим их эпюру по длине стержня.

- на первом участке по обеим границам характерного участка, т.к. $\sigma_1 \neq \text{const}$

$$\sigma_1 = \frac{10 \cdot 10^3}{144} = 69,4 \text{ МПа}; \quad \sigma_1 = -\frac{20 \cdot 10^3}{144} = -138,9 \text{ МПа};$$

- на втором участке, т.к. $\sigma_2 = \text{const}$

$$\sigma_2 = \frac{15 \cdot 10^3}{288} = 52,1 \text{ МПа};$$

5. Определим перемещение свободного сечения стержня. Обозначим, начиная от заделки стержня, границы характерных участков цифрами 0, 1, 2 (рисунок, а).

Найдем удлинения обоих участков стержня.

$$\begin{aligned} \Delta l_{01} &= \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot 2A} = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 288} = 0,52 \text{ мм}; \\ \Delta l_{12} &= \int_0^a \frac{N_1 \cdot dz_1}{E \cdot A} = \int_0^a \frac{(F_1 - qz_1) dz_1}{E \cdot A} = \frac{F_1 \cdot a}{E \cdot A} - \frac{qa^2}{E \cdot A \cdot 2} = \\ &= \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 144} - \frac{15 \cdot (2 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 10^5 \cdot 144 \cdot 2} = -0,36 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Перемещение сечения 0 равно нулю, т.е. $\Delta l_0 = 0$.

Перемещение сечения 1 равно удлинению участка 01 плюс перемещение сечения 0, т.е. $\Delta l_1 = \Delta l_{01} + \Delta l_0 = 0,52 \text{ мм}$.

Перемещение сечения 2 найдем аналогично: $\Delta l_2 = \Delta l_{12} + \Delta l_1 = (-0,36) + 0,52 = 0,16 \text{ мм}$.

На участке 12 продольная сила $N \neq \text{const}$, поэтому эпюра Δl_{12} представляет собой параболу с выраженным минимумом в точке, где $N_1 = 0$:

$$N_1 = F_1 - qz_1 = 0,$$

отсюда

$$z_1 = F_1 / q = 10 / 15 = 0,67 \text{ м}.$$

$$\Delta l_{z_1} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,67 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 144} - \frac{15 \cdot (0,67 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 10^5 \cdot 144 \cdot 2} = 0,11 \text{ мм}.$$

Найдем Δl^* :

$$\Delta l^* = \Delta l_2 - \Delta l_{z_1} = 0,16 - 0,11 = 0,05 \text{ мм}.$$

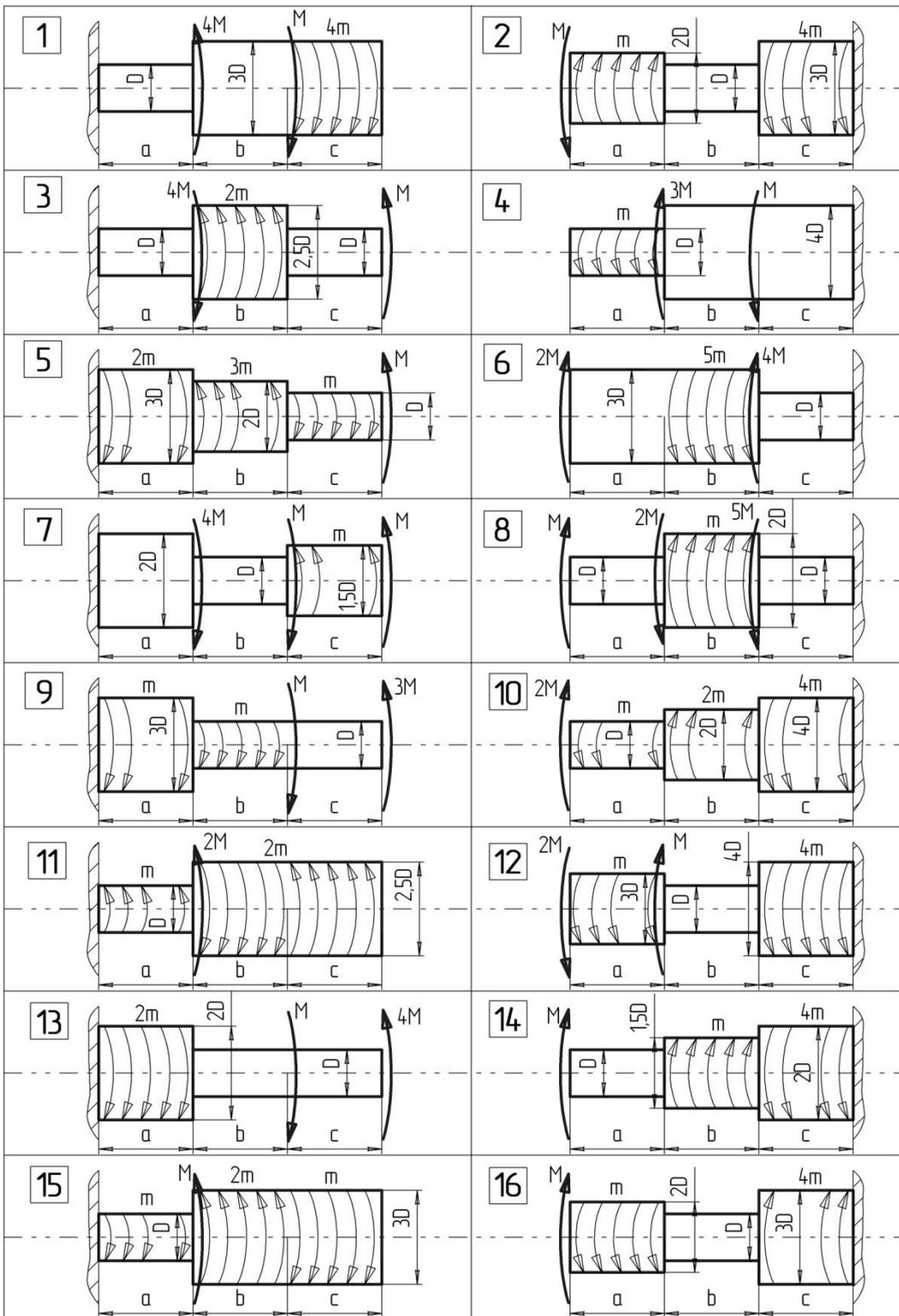
Покажем эпюру перемещений, откладывая значения Δl_0 , Δl_1 , Δl_2 , Δl^* (параболу на эпюре Δl , ввиду малости величин можно условно заменять прямой пунктирной линией).

Тема 2: КРУЧЕНИЕ
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ №2.

Время на выполнение задания – 3 часа (ОФО), 20 часов (ЗФО).

Тип практического задания – расчетно-графическая работа.

Задание 2. Из условия прочности подобрать поперечное сечение круглого стального вала; полученный в результате расчёта диаметр округлить по нормальному ряду размеров. Схема нагружения вала показана на рис.2. Вычислить напряжение в опасном сечении и показать эпюру этого напряжения. Определить угол закручивания свободного сечения вала и построить его эпюру. Данные для расчетов приведены в табл. 1.



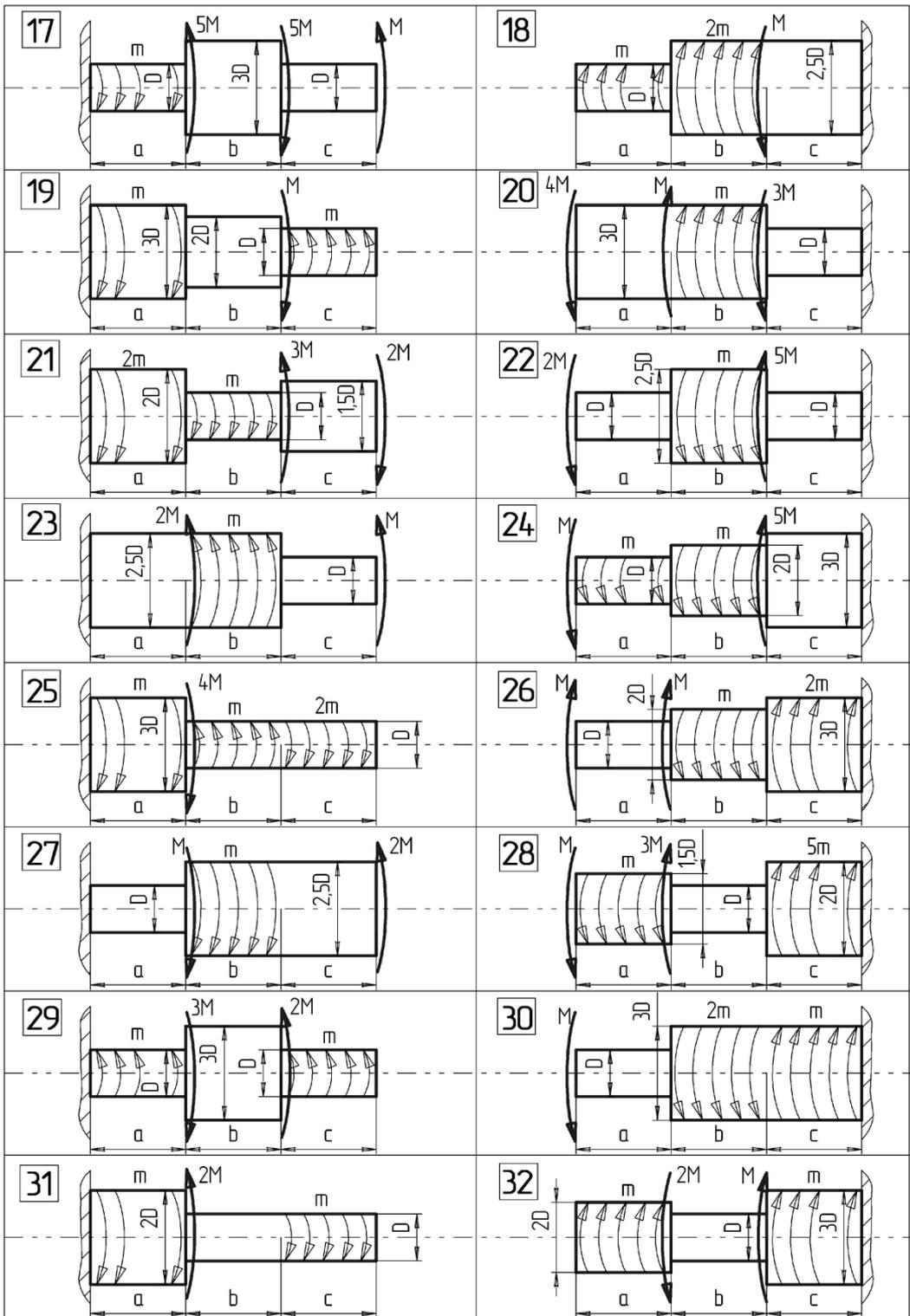
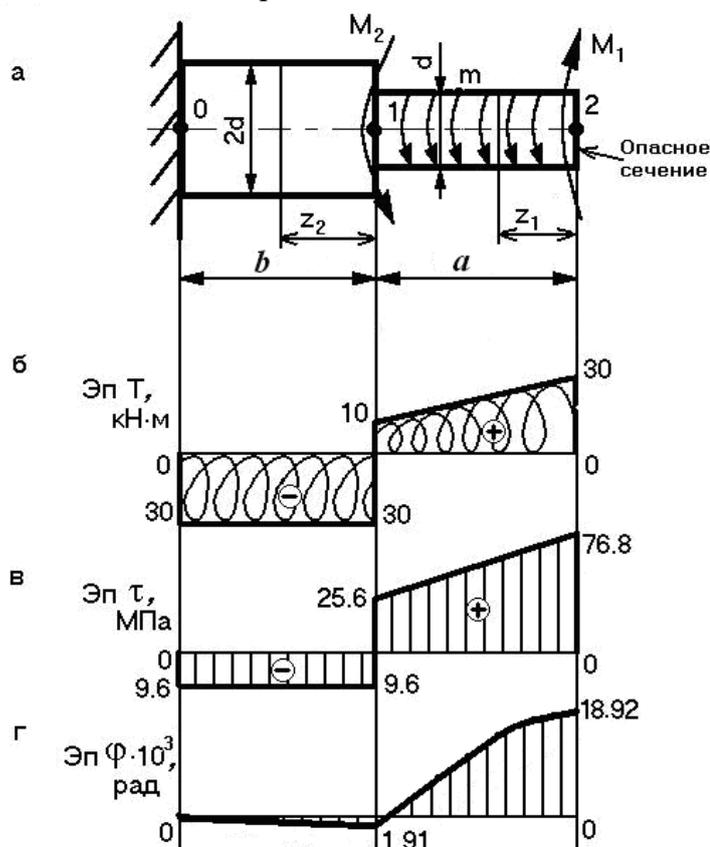


Рис.2. Схема нагружения вала

Пример решения задачи 2. Подобрать из условия прочности круглое поперечное сечение стального ступенчатого вала, схема нагружения которого показана на рисунке. Вычислить напряжение в опасном сечении и показать эпюру этого напряжения. Построить эпюру напряжений по длине вала. Определить угол закручивания свободного сечения вала и построить его эпюру. При вычислениях принять $M_1 = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_2 = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $m = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}/\text{м}$, $a = b = 2 \text{ м}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $[\tau] = 80 \text{ МПа}$.

Решение. 1. Построим эпюру крутящих моментов. Для этого разобьем вал на два характерных участка, начиная со свободного конца. Для определения внутренних силовых факторов, т.е. крутящих моментов, применяем метод сечений.



Проведем сечение в пределах первого характерного участка и рассмотрим равновесие отсеченной части. Крутящий момент T_1 в этом сечении найдем как алгебраическую сумму внешних моментов, действующих на отсеченную часть вала, относительно оси вала.

Для 1-го участка при $0 \leq z_1 \leq a$

$$T_1 = M_1 - m z_1$$

при $z_1 = 0$

$$T_1 = M_1 = 30 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

при $z_1 = a$

$$T_1 = M_1 - m a = 30 - 10 \cdot 2 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Проведем сечение на втором характерном участке и определим крутящий момент

T_2

Для 2-го участка при $0 \leq z_2 \leq b$

$$T_2 = M_1 - m a + M_2 = 30 - 10 \cdot 2 - 40 = -30 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Построим эпюру, показывающую как меняется значение T по длине вала. Для этого проведем базу эпюры параллельно оси вала и отложим в произвольно выбранном масштабе величины крутящих моментов по оси ординат, причем вверх – положительные значения, вниз – отрицательные. Полученную эпюру заштрихуем (рисунок, б), проставим значения T и укажем их знаки.

Проверим правильность построения эпюры T . На участке, где действует распределенный момент, должна быть наклонная линия, где нет распределенного момента – линия, параллельная базе эпюры. В сечениях, где приложены сосредоточенные моменты, должны быть скачки равные им по величине.

2. Определим опасное сечение вала. Для этого вычислим максимальные напряжения по участкам:

$$\tau_{\max 1} = \frac{|T_{\max 1}|}{W_{\rho 1}} = \frac{|T_{\max 1}|}{0,2d^3} = \frac{30}{0,2d^3};$$

$$\tau_{\max 2} = \frac{|T_{\max 2}|}{W_{\rho 2}} = \frac{|T_{\max 2}|}{0,2(2d)^3} = \frac{30}{0,2 \cdot (8d^3)} = \frac{3,75}{0,2d^3}.$$

Так как $\tau_{\max 1} > \tau_{\max 2}$, следовательно, опасное сечение - на первом участке, где $T = T_{\max 1}$. Укажем опасное сечение на рис.4.8, б.

3. Найдем диаметр вала d из условия прочности в опасном сечении:

$$\tau_{\max 1} = \frac{|T_{\max 1}|}{W_{\rho 1}} \leq \frac{T_{\max 1}}{0,2d^3} \leq [\tau],$$

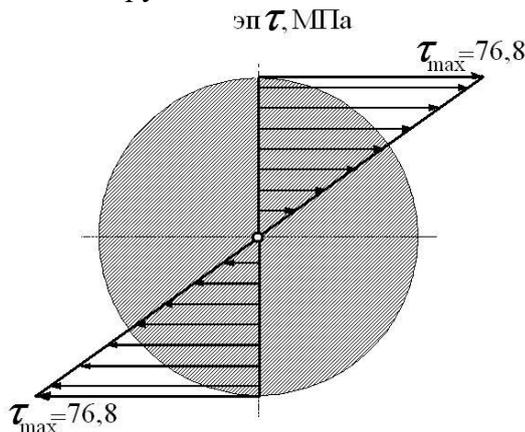
$$\text{тогда } d \geq \sqrt[3]{\frac{T_{\max 1}}{0,2 \cdot [\tau]}} \geq \sqrt[3]{\frac{30 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 80}} \geq 123,3 \text{ мм}$$

Полученный размер следует округлить по нормальному ряду размеров, поэтому принимаем $d = 125$ мм.

Вычислим напряжение в опасном сечении стержня.

$$\tau_{\max} = \frac{|T_{\max 1}|}{0,2d^3} = \frac{30 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 125^3} = 76,8 \text{ МПа}.$$

Покажем эпюру τ по диаметру опасного сечения вала.



4. Вычислим напряжения ($\tau = \frac{T}{W_{\rho}}$) и построим их эпюру по длине вала (рисунок,

в). Для первого участка вычислим напряжения в начале и в конце участка, т.к. $\tau_1 \neq \text{const}$

$$\tau_1 = \frac{30 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 125^3} = 76,8 \text{ МПа}, \tau_1 = \frac{10 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 125^3} = 25,6 \text{ МПа}.$$

$$\text{Для второго участка } \tau_2 = \text{const}, \tau_2 = \frac{30 \cdot 10^6}{0,2 \cdot (2 \cdot 125)^3} = 9,6 \text{ МПа}.$$

5. Определим угол закручивания свободного сечения вала. Обозначим сечения цифрами 0,1,2, начиная от заделки вала.

Определим углы закручивания участков:

$$\varphi_{01} = \frac{T_2 \cdot b}{G \cdot I_{\rho 01}} = -\frac{30 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,91 \cdot 10^8} = -1,91 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\text{где } I_{\rho_{01}} = 0,1(2d)^4 = 0,1(2 \cdot 125)^4 = 3,91 \cdot 10^8 \text{ мм}^4$$

$$\begin{aligned} \varphi_{12} &= \int_0^a \frac{T_1 dz_1}{GI_{\rho_{12}}} = \int_0^a \frac{(M_1 - mz_1) dz_1}{G \cdot I_{\rho_{12}}} = \frac{M_1 a}{GI_{\rho_{12}}} - \frac{ma^2}{GI_{\rho_{12}} \cdot 2} = \\ &= \frac{30 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,24 \cdot 10^8} - \frac{10 \cdot 10^3 (2 \cdot 10^3)^2}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,24 \cdot 10^8 \cdot 2} = 20,83 \cdot 10^{-3} \text{ рад} \end{aligned}$$

$$\text{где } I_{\rho_{12}} = 0,1(d)^4 = 0,1(125)^4 = 0,24 \cdot 10^8 \text{ мм}^4$$

Вычислим углы закручивания сечений:

$$\text{для сечения 0 } \varphi_0 = 0;$$

$$\text{для сечения 1 } \varphi_1 = \varphi_0 + \varphi_{01} = -1,91 \cdot 10^{-3} \text{ рад,}$$

$$\text{для сечения 2 } \varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_{12} = -1,91 \cdot 10^{-3} + 20,83 \cdot 10^{-3} = 18,92 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$$

Построим эпюру углов закручивания, начиная от закрепленного конца (рисунок, з). На участке 12 эпюра φ представляет собой параболу, которую ввиду малости величин можно условно заменять прямой пунктирной линией.

ТЕМА 3: ИЗГИБ

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ №3.

Время на выполнение задания – 3 часа (ОФО), 20 часов (ЗФО).

Тип практического задания – расчетно-графическая работа.

Задание. Из условия прочности подобрать круглое поперечное сечение консольной стальной балки. Вычислить напряжение в опасном сечении балки и построить эпюру напряжения. Схема нагружения балки показана на рис.3. Данные для расчетов приведены в табл. 1

Пример решения задачи 3. Для консольно закрепленной деревянной балки, нагруженной, как показано на рисунке, необходимо из условия прочности подобрать круглое поперечное сечение. При вычислениях принять $[\sigma] = 8 \text{ МПа}$, $q = 10 \text{ кН/м}$, $M = 10 \text{ кНм}$, $a = 1 \text{ м}$, $b = 1,5 \text{ м}$.

Решение. 1. Балка закреплена в одном сечении, поэтому опорные реакции в заделке не определяем, а построение эпюр внутренних силовых факторов начнем со свободного конца. Разобьем балку на два характерных участка BC и CA и, используя метод сечений запишем выражения для поперечной силы Q и изгибающего момента M .

Для 1-го участка при $0 \leq z_1 \leq 1 \text{ м}$

$$Q_I = qz_1,$$

$$M_I = -q \frac{z_1^2}{2}$$

$$\text{при } z_1 = 0,$$

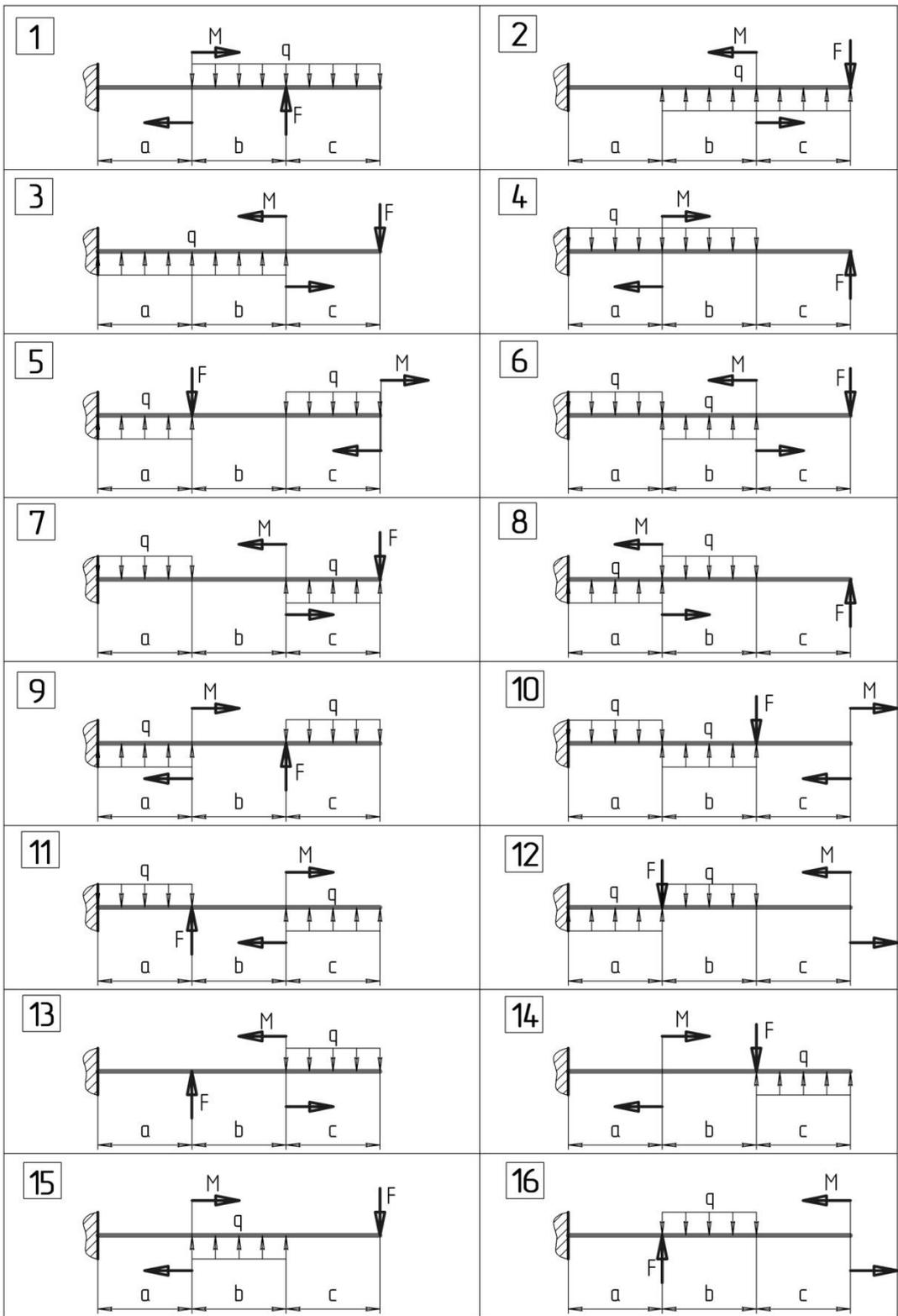
$$Q_I = 0,$$

$$M_I = 0,$$

$$\text{при } z_1 = a = 1 \text{ м,}$$

$$Q_I = qa = 10 \cdot 1 = 10 \text{ кН,}$$

$$M_I = -q \frac{a^2}{2} = -10 \frac{1^2}{2} = -5 \text{ кНм.}$$



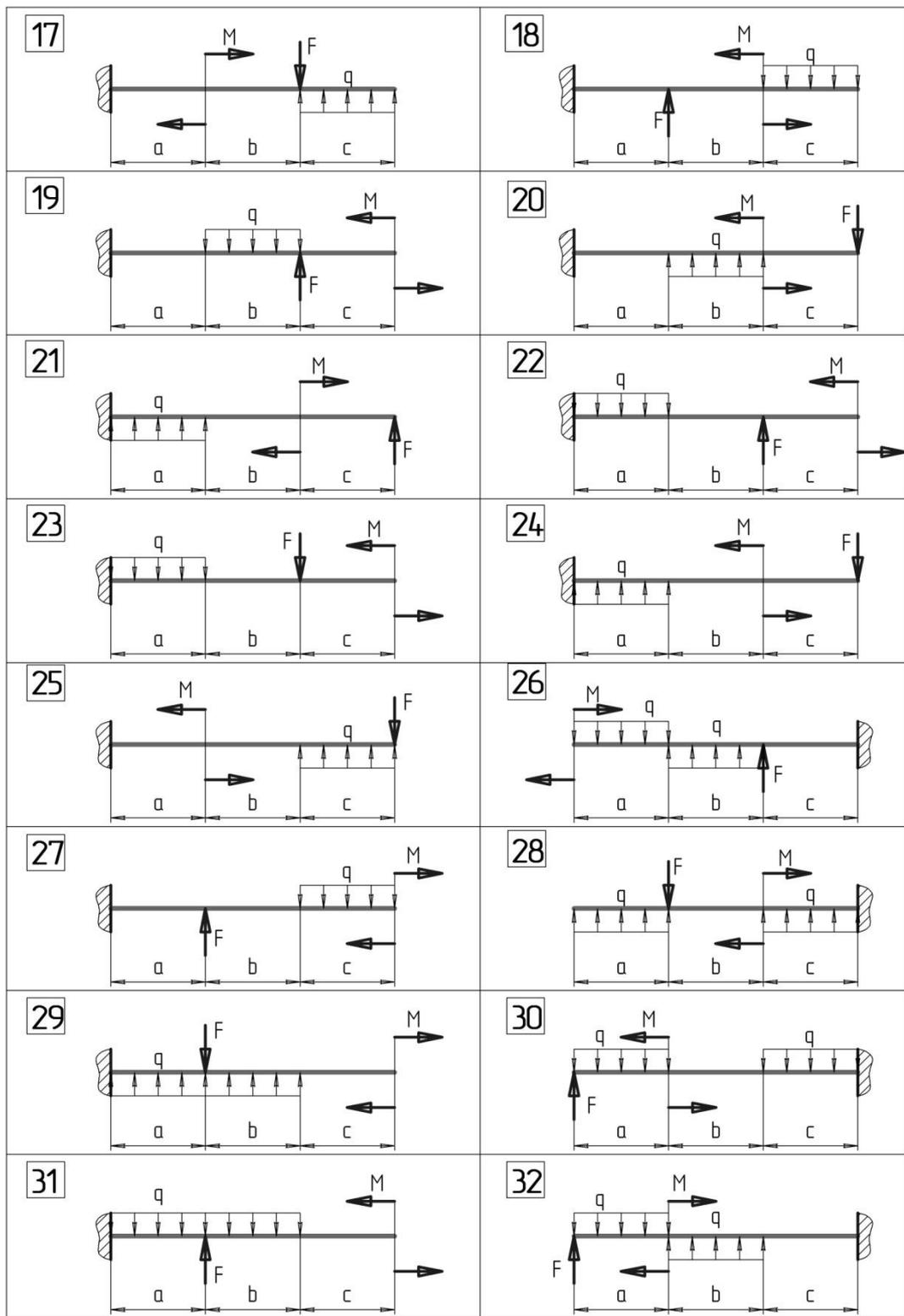


Рис. 3. Схема нагружения консольной балки

Для 2-го участка при $0 \leq z_2 \leq 1,5$ м

$$Q_2 = qa = 10 \cdot 1 = 10 \text{ кН},$$

$$M_2 = -qa \left(\frac{a}{2} + z_2 \right) + M,$$

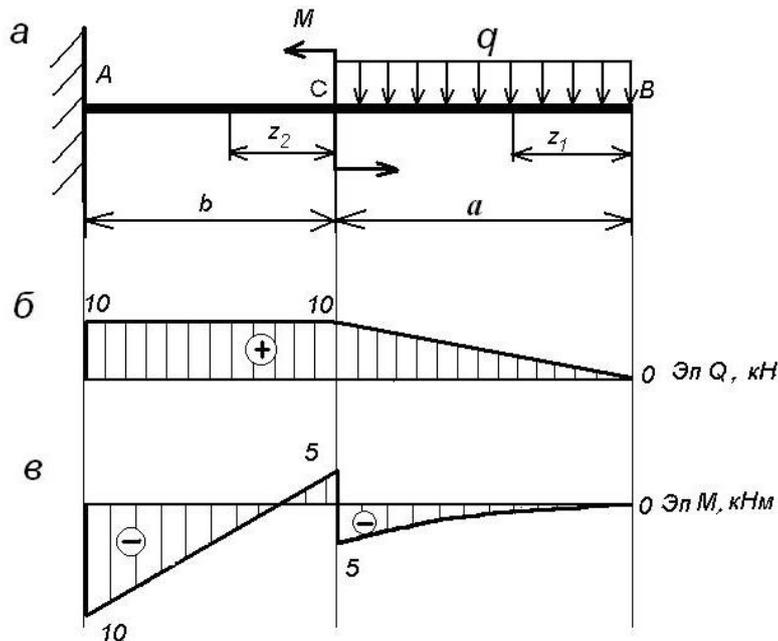
при $z_2 = 0$,

$$M_2 = -qa \frac{a}{2} + M = -10 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 10 = 5 \text{ кНм},$$

при $z_2 = b = 1,5 \text{ м}$,

$$M_2 = -qa \left(\frac{a}{2} + b \right) + M = -10 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 1,5 \right) + 10 = -10 \text{ кНм}.$$

По полученным данным построим эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M (рисунок, б, в). По эпюре моментов найдем опасное сечение балки, т.е. сечение, где $M_{\max} = 10 \text{ кНм}$.



2. Из условия прочности при изгибе подберем поперечное сечение балки в форме круга:

$$W_x \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]}.$$

Так как $W_x = 0,1d^3$, то

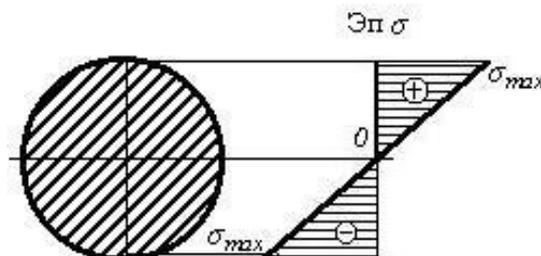
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\max}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 10^6}{0,1 \cdot 8}} = 232 \text{ мм}.$$

Примем по нормальному ряду линейных размеров $d = 235 \text{ мм}$.

Определим напряжение в опасном сечении:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{10 \cdot 10^6}{0,1 \cdot 235^3} = 7,7 \text{ МПа}$$

Покажем эпюру напряжений σ по высоте опасного сечения (сечение повернуто в плоскость чертежа)



Результаты расчетов позволяют сделать вывод о том, что прочность спроектированной балки обеспечена, т.к. $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$.

ТЕМА 4: УСТОЙЧИВОСТЬ

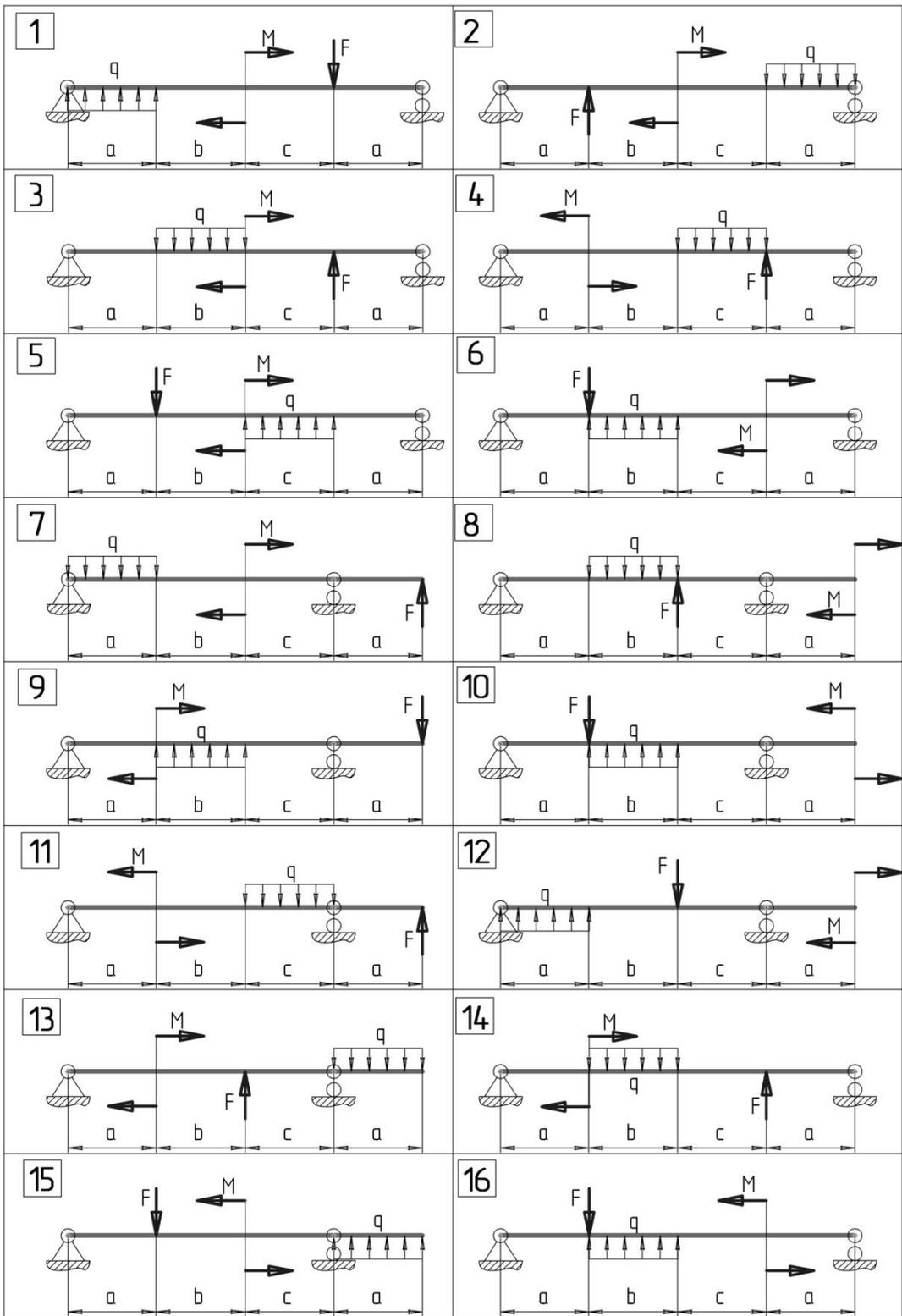
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ № 4.

Время на выполнение задания – 1,5 часа (ОФО), 10 часов (ЗФО).

Тип практического задания – расчетно-графическая работа.

Задание 4. Из условия прочности подобрать поперечное сечение балки на двух опорах в виде двутавра. Вычислить действительные нормальные и касательные напряжения, построить их эпюры для опасного сечения балки. Определить прогиб по середине длины балки и углы поворота на опорах. Схема нагружения балки показана на рис.4. Данные для расчетов приведены в табл. 1

Пример решения задачи 4. Из условия прочности подобрать поперечное сечение стальной балки в виде двутавра. Вычислить действительные нормальные σ и касательные τ напряжения, построить их эпюры для опасного сечения балки. Определить прогиб посередине балки и углы поворота на опорах. Схема нагружения балки показана на рис. 5.16, а. При вычислениях принять: $F = 10$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 14$ кН·м, $a = 2$ м, $b = 4$ м, $c = 6$ м, $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.



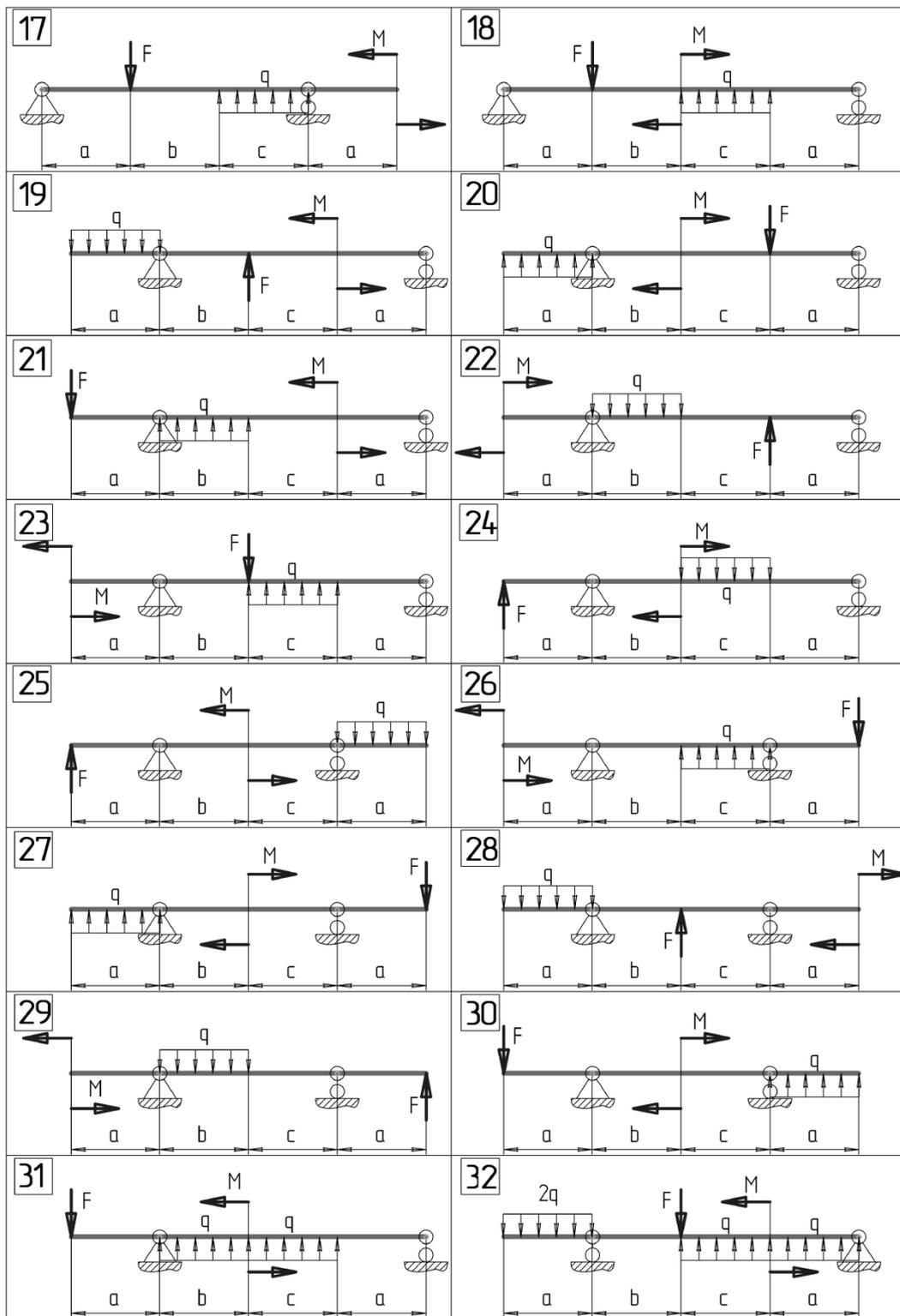


Рис.4. Схема нагружения балки на опорах

Решение. 1. Из условий равновесия определим реакции опор:

$$\Sigma m_B(\bar{F}_K) = 0; F(a + b + c) - R_A(b + c) + qb\left(\frac{b}{2} + c\right) - M = 0;$$

$$R_A = \frac{F \cdot (a + b + c) + qb \cdot \left(\frac{b}{2} + c\right) - M}{b + c} = \frac{10 \cdot (2 + 4 + 6) + 2 \cdot 4 \cdot \left(\frac{4}{2} + 6\right) - 14}{4 + 6} = 17 \text{ кН};$$

$$\Sigma m_A(\bar{F}_K) = F \cdot a - qb \frac{b}{2} - M + R_B(b + c) = 0.$$

$$R_B = \frac{-Fa + qb \frac{b}{2} + M}{b + c} = \frac{-10 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} + 14}{4 + 6} = 1 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\Sigma F_{ky} = -F + R_A - qb + R_B = -10 + 17 - 2 \cdot 4 + 1 = 0.$$

Проверка показала, что реакции опор найдены верно.

2. Методом сечений вычислим значения поперечной силы Q и изгибающего момента M . Балка имеет три характерных участка

Для 1-го участка при $0 \leq z_1 \leq a$

$$Q_1 = -F = -10 \text{ кН},$$

$$M_1 = -Fz_1,$$

при $z_1 = 0$,

$$M_1 = 0,$$

при $z_1 = a$;

$$M_1 = -F \cdot a = -10 \cdot 2 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для 2-го участка при $0 \leq z_2 \leq b$

$$Q_2 = -F + R_A - qz_2;$$

$$M_2 = -F(a + z_2) + R_A z_2 - qz_2 \frac{z_2}{2};$$

при $z_2 = 0$

$$Q_2 = -F + R_A = -10 + 17 = 7 \text{ кН},$$

$$M_2 = -Fa = -10 \cdot 2 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

при $z_2 = b$;

$$Q_2 = -F + R_A - qb = -10 + 17 - 2 \cdot 4 = -1 \text{ кН}.$$

$$M_2 = -F(a + b) + R_A b - qb \frac{b}{2} = -10(2 + 4) + 17 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для 3-го участка при $0 \leq z_3 \leq c$

$$Q_3 = -R_B = -1 \text{ кН};$$

$$M_3 = R_B z_3;$$

при $z_3 = 0$;

$$M_3 = 0;$$

при $z_3 = c$;

$$M_3 = R_B \cdot c = 1 \cdot 6 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Так как на втором участке величина Q_2 меняет знак (эпюра Q пересекает базу эпюры), значение M_2 будет иметь экстремум. Определим экстремальное значение M_2 . Вычислим значение z_2 , при котором $Q_2 = 0$:

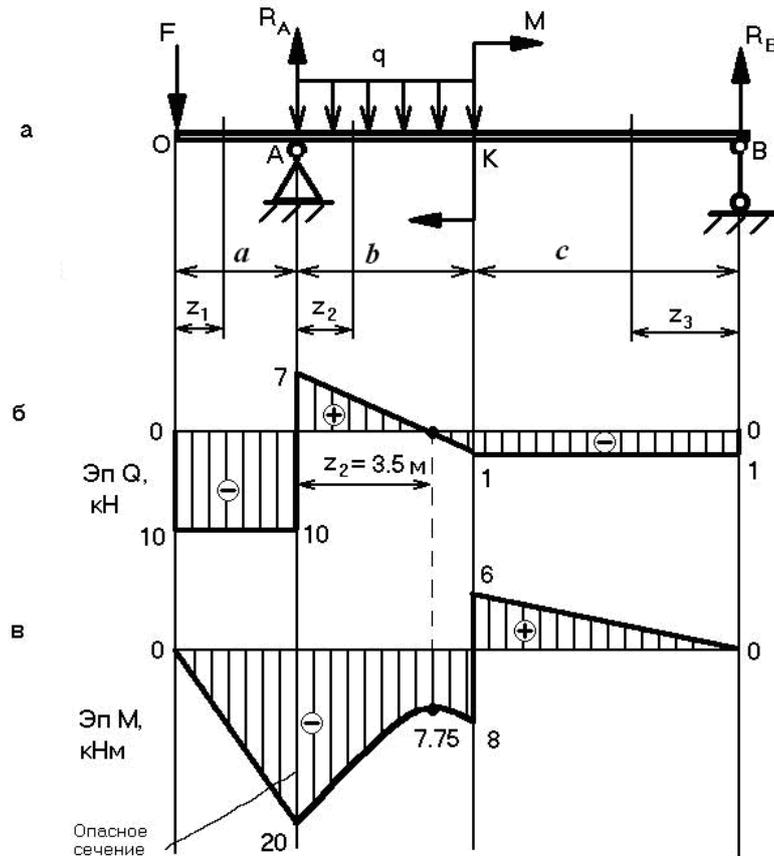
$$Q_2 = -F + R_A - qz_2 = 0;$$

$$z_2 = \frac{-F + R_A}{q} = \frac{-10 + 17}{2} = 3,5 \text{ м}.$$

При $z_2 = 3,5 \text{ м}$:

$$M_2 = -10(2 + 3,5) + 17 \cdot 3,5 - 2 \cdot 3,5 \frac{3,5}{2} = -7,75 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Построим эпюры Q и M (рисунке, б, в).



По эпюре M определим опасное сечение с максимальным по модулю моментом $|M_{\max}| = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

2. Запишем условие прочности для опасного сечения балки

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x} \leq [\sigma].$$

Отсюда
$$W_x \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} \geq \frac{20 \cdot 10^6}{160} \geq 125 \cdot 10^3 \text{ мм}^3$$

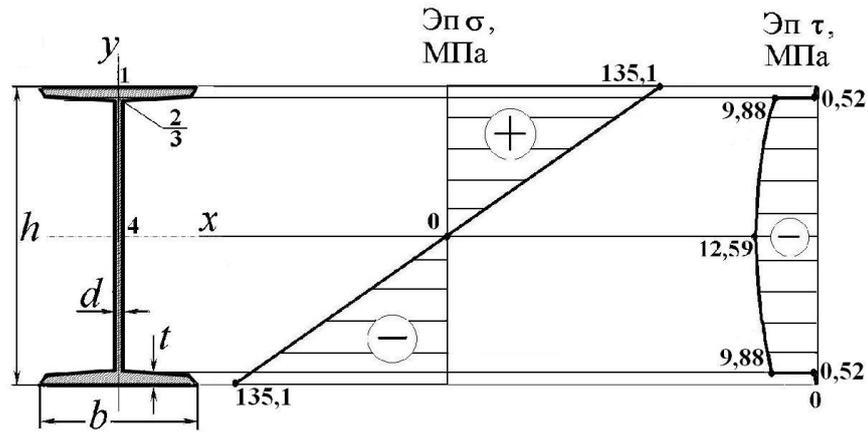
Требуемое значение момента сопротивления сечения $W_x \geq 125 \text{ см}^3$.

По сортаменту прокатных профилей подбираем двутавр № 18 и выписываем его геометрические характеристики:

$$h = 180 \text{ мм}, \quad b = 95 \text{ мм}, \quad d = 5,0 \text{ мм}, \quad t = 8,0 \text{ мм}, \\ W_x = 148 \text{ см}^3, \quad I_x = 1330 \text{ см}^4, \quad S_x = 83,7 \text{ см}^3,$$

Вычислим напряжение в опасном сечении балки и построим эпюру σ по высоте двутавра:

$$\sigma = \frac{|M_{\max}|}{W_x} = \frac{20 \cdot 10^6}{148 \cdot 10^3} = 135,1 \text{ МПа}.$$



4. Для построения эпюры касательных напряжений по высоте опасного сечения балки представим двутавр в первом приближении как фигуру, составленную из трех условных прямоугольников, размерами

- $b \times t$ (горизонтальный);
- $d \times (h - 2t)$ (вертикальный);
- $b \times t$ (горизонтальный).

Обозначим точки по высоте двутавра цифрами 1, 2, 3, 4. Вычислим значения касательного напряжения в указанных точках:

$$\tau_1 = 0.$$

$$\tau_2 = \frac{Q \cdot bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)}{I_x \cdot b} = \frac{-10 \cdot 10^3 \cdot 95 \cdot 8.0 \left(\frac{180}{2} - \frac{8.0}{2} \right)}{1330 \cdot 10^4 \cdot 95} = -0,52 \text{ МПа},$$

$$\tau_3 = \frac{Q \cdot bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)}{I_x \cdot d} = \frac{-10 \cdot 10^3 \cdot 95 \cdot 8.0 \left(\frac{180}{2} - \frac{8.0}{2} \right)}{1330 \cdot 10^4 \cdot 5,0} = -9,88 \text{ МПа}$$

$$\tau_4 = \frac{Q \cdot S_x}{I_x \cdot d} = \frac{-10 \cdot 10^3 \cdot 83.7 \cdot 10^3}{1330 \cdot 10^4 \cdot 5,0} = -12,59 \text{ МПа}.$$

Построим эпюру τ в опасном сечении балки.

5. Определим углы поворота сечений на опорах A (θ_A) и B (θ_B) и прогиб (y_K) посередине балки в точке K , применяя универсальное уравнение упругой линии:

$$EI_x \theta_A = EI_x \theta_0 - F \frac{a^2}{2},$$

$$EI_x \theta_B = EI_x \theta_0 - F \frac{(a+b+c)^2}{2} + R_A \frac{(a+b+c-a)^2}{2} - q \frac{(a+b+c-a)^3}{6} +$$

$$+ q \frac{(a+b+c-a-b)^3}{6} + M(a+b+c-a-b),$$

$$EI_x y_K = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 (a+b) - F \frac{(a+b)^3}{6} + R_A \frac{(a+b-a)^3}{6} -$$

$$- q \frac{(a+b-a)^4}{24}.$$

Необходимо вычислить неизвестные значения θ_0 и y_0 . Для этого составим дополнительные уравнения:

$$EI_x y_A = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 a - F \frac{a^3}{6},$$

$$EI_x y_B = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 (a+b+c) - F \frac{(a+b+c)^3}{6} + R_A \frac{(a+b+c-a)^3}{6} - q \frac{(a+b+c-a)^4}{24} + q \frac{(a+b+c-a-b)^4}{24} + M \frac{(a+b+c-a-b)}{2}.$$

Учитывая, что $y_A = 0$, $y_B = 0$ и решая совместно два этих уравнения, найдем

$$EI_x \theta_0 = 50,67 \text{ Нмм}^2, \\ EI_x y_0 = -88,04 \text{ Нмм}^3.$$

Тогда, принимая $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $I_x = 1330 \cdot 10^4$ мм⁴, получим значения

$$\theta_A = 11,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

$$\theta_B = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

$$y_K = 6,01 \text{ мм}.$$

Таким образом, деформированная ось балки (упругая линия) в опорах A и B будет повернута против хода часовой стрелки $\theta_A > 0$, $\theta_B > 0$, а в точке K смещена вверх на 6,01 мм. Согласно эпюре M , упругая линия будет иметь выпуклую форму на участке OK ($M < 0$) и вогнутую – на участке KB ($M > 0$).

ТЕМА 4: УСТОЙЧИВОСТЬ

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ № 5.

Время на выполнение задания – 1,5 часа (ОФО), 10 часов (ЗФО).

Тип практического задания – расчетно-графическая работа.

Задание 5. Стальной стержень длиной l сжимается силой F . Необходимо:

1. Вычислить размеры поперечного сечения стержня при условии прочности на сжатие, принимая пониженные допускаемые напряжения. Расчет выполнять методом последовательных приближений. Первоначально задать величину коэффициента снижения допускаемых напряжений $\varphi = 0,5$.

2. Определить величину критической силы и коэффициента запаса устойчивости.

Схема нагружения стержня показана на рис.5. Данные для расчетов приведены в табл. 2

Таблица 2.

| Вариант | Номер | | F, кН | Вариант | Номер | | F, кН |
|---------|-------|---------|-------|---------|-------|---------|-------|
| | схемы | Сечения | | | схемы | сечения | |
| 1 | 1 | I | 200 | 16 | 1 | VI | 175 |
| 2 | 2 | II | 205 | 17 | 2 | VII | 180 |
| 3 | 3 | III | 210 | 18 | 3 | VIII | 185 |
| 4 | 4 | IV | 215 | 19 | 4 | IX | 190 |
| 5 | 5 | V | 220 | 20 | 5 | X | 195 |
| 6 | 6 | VI | 225 | 21 | 6 | I | 200 |
| 7 | 7 | VII | 230 | 22 | 7 | II | 210 |
| 8 | 8 | VIII | 235 | 23 | 8 | III | 220 |
| 9 | 9 | IX | 240 | 24 | 9 | IV | 230 |
| 10 | 10 | X | 245 | 25 | 10 | V | 240 |
| 11 | 11 | I | 250 | 26 | 11 | VI | 250 |
| 12 | 12 | II | 255 | 27 | 12 | VII | 260 |
| 13 | 13 | III | 260 | 28 | 13 | VIII | 270 |
| 14 | 14 | IV | 265 | 29 | 14 | IX | 280 |
| 15 | 15 | V | 270 | 30 | 15 | X | 290 |

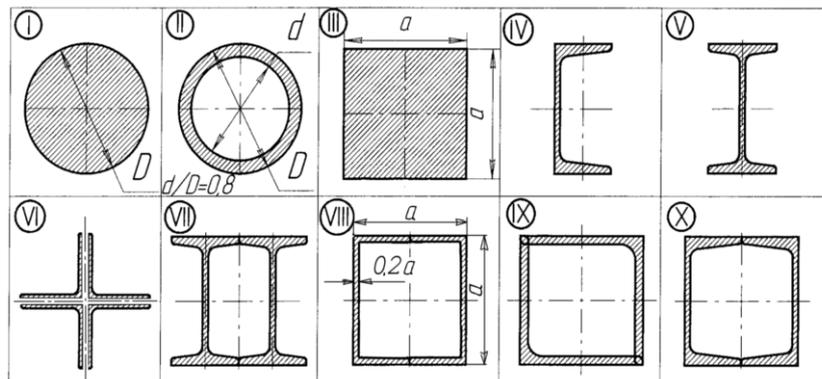
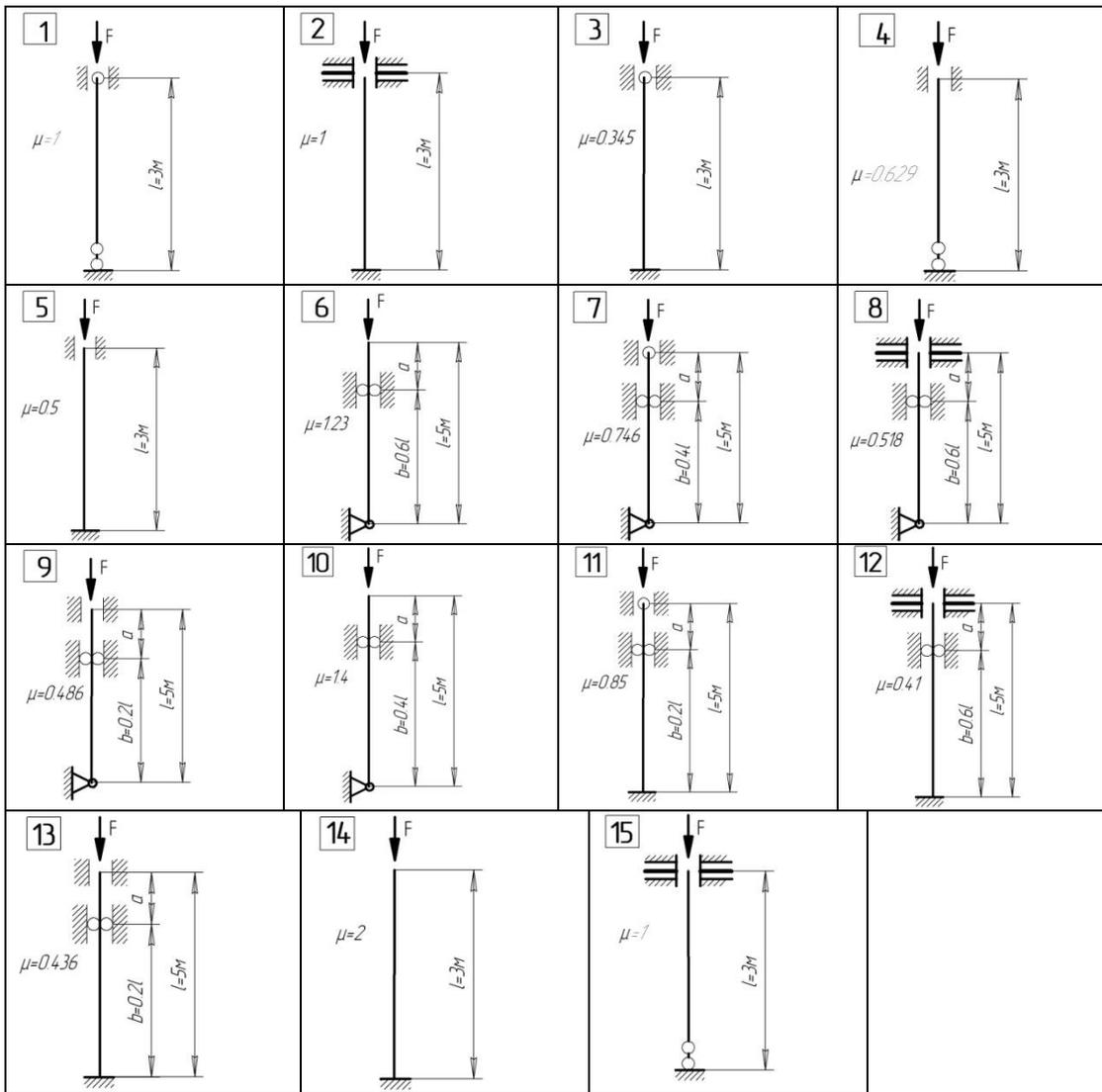


Рис. 5. Схема нагружения стержня и виды его сечения

Пример решения задачи 5. Определить из расчета на устойчивость размер поперечного сечения стальной сжатой стойки ($[\sigma_c] = 160 \text{ МПа}$). Расчет производить последовательными приближениями, предварительно задать коэффициент продольного изгиба $\varphi_1 = 0,5$. Нагрузка $F = 500 \text{ кН}$, для стойки длиной $l = 2,5 \text{ м}$, коэффициент приведения длины $\mu = 0,7$. Найти критическую силу F_k и коэффициент запаса устойчивости n_y .

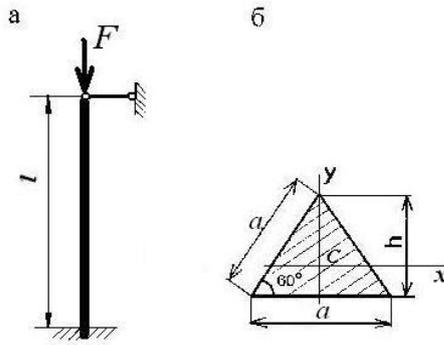


Рисунок к задаче 5

Решение. 1. Для определения гибкости стойки вычисляем:

- минимальный момент инерции ее поперечного сечения

$$I_{\min} = I_x = I_y = \frac{ah^3}{36} = \frac{a(a \sin 60^\circ)^3}{36} = 0,018a^4,$$

- площадь сечения

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{a \cdot a \sin 60^\circ}{2} = 0,433a^2,$$

- радиус инерции сечения

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,018a^4}{0,433a^2}} = 0,204a,$$

- гибкость стойки

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 2,5}{0,204a} = \frac{8,578}{a}.$$

2. Рассматриваем первое приближение, $\varphi_1 = 0,5$.

Из условия устойчивости

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma_c]$$

$$\text{находим } A \geq \frac{F}{\varphi_1[\sigma_c]} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160} = 6250 \text{ мм}^2,$$

$$\text{тогда } a = \sqrt{\frac{A}{0,433}} = \sqrt{\frac{6250}{0,433}} = 120,1 \text{ мм}.$$

Принимаем $a = 120$ мм, тогда

$$\lambda = \frac{8,578}{0,120} = 71,5.$$

При $\lambda = 70$ $\varphi = 0,81$ и при $\lambda = 80$ $\varphi = 0,75$. Используя интерполяцию, находим

$$\varphi'_1 = 0,81 - \frac{0,81 - 0,75}{10} \cdot 1,5 \approx 0,80.$$

$$3. \text{ Второе приближение, } \varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,80}{2} = 0,65.$$

$$\text{Находим } A = \frac{F}{\varphi_2[\sigma_c]} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,65 \cdot 160} = 4808 \text{ мм}^2,$$

$$\text{тогда } a = \sqrt{\frac{4808}{0,433}} = 105,4 \text{ мм.}$$

Принимаем $a = 105$ мм, тогда

$$\lambda = \frac{8,578}{0,105} = 81,7.$$

$$\text{Определяем } \varphi'_2 = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{10} \cdot 1,7 = 0,74.$$

$$4. \text{ Третье приближение, } \varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,65 + 0,74}{2} = 0,70.$$

$$\text{Находим } A = \frac{F}{\varphi_3 [\sigma_c]} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,70 \cdot 160} = 4464 \text{ мм}^2,$$

$$\text{тогда } a = \sqrt{\frac{4464}{0,433}} = 101,5 \text{ мм,}$$

принимаем $a = 102$ мм,

$$\lambda = \frac{8,578}{0,102} = 84,1$$

$$\text{Находим } \varphi'_3 = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{10} \cdot 4,1 = 0,73.$$

$$5. \text{ Четвертое приближение, } \varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi'_3}{2} = \frac{0,7 + 0,73}{2} = 0,72.$$

$$\text{Находим } A = \frac{F}{\varphi_4 [\sigma_c]} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,72 \cdot 160} = 4340 \text{ мм}^2,$$

$$\text{тогда } a = \sqrt{\frac{4340}{0,433}} = 100,1 \text{ мм,}$$

принимаем $a = 100$ мм,

$$\lambda = \frac{8,578}{0,100} = 85,78$$

$$\text{Находим } \varphi'_4 = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{10} \cdot 5,78 = 0,715.$$

Так как $\varphi'_4 \approx \varphi_4$, то окончательно принимаем размер $a = 100$ мм.

6. Критическое напряжение находим по формуле Ясинского, т.к.

$$\lambda < 100,$$

$$\sigma_k = 310 - 1,14\lambda = 310 - 1,14 \cdot 85,75 = 212,2 \text{ МПа.}$$

7. Вычислим критическую силу:

$$F_k = \sigma_k \cdot A = 212,2 \cdot 4340 = 920948 \text{ Н} = 921 \text{ кН}$$

8. Определим коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{F_k}{F} = \frac{921}{500} = 1,8.$$