Негосударственное частное образовательное учреждение высшего образования «Технический университет УГМК»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Специальность **21.05.04 Горное дело**

Специализация **Подземная разработка рудных месторождений**

Уровень высшего образования **Специалитет**
(бакалавриат, специалитет, магистратура)

Автор-разработчик: Петрова С.Н., канд. пед. наук, доцент
Рассмотрено на заседании кафедры механики и автоматизации технологических процессов и производств
Одобрено Методическим советом университета 30 июня 2021 г., протокол № 4

г. Верхняя Пышма
2021

Методические рекомендации к выполнению практических работ составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины.

Практические занятия по дисциплине имеют целью закрепление обучающимися на практике полученных теоретических знаний под руководством преподавателя.

Примерная тематика практических работ

Номер работы	Наименование работы
1	Условия равновесия системы сходящихся сил. Условия равновесия плоской системы параллельных сил. Условия равновесия плоской системы произвольных сил
2	Условия равновесия пространственной системы параллельных сил. Условия равновесия пространственной системы произвольных сил
3	Определение координат центра тяжести сложных конструкций.
4	Промежуточный контроль по разделу «Статика»
5	Координатный способ задания движения точки. Естественный способ задания движения точки. Поступательное и вращательное движения тела.
6	Определение скоростей точек и звеньев плоского механизма. МЦС. Определение ускорений точек и звеньев плоского механизма.
7	Определение абсолютной скорости точки при сложном движении. Определение ускорения Кориолиса. Определение абсолютного ускорения при сложном движении точки.
8	Промежуточный контроль по разделу «Кинематика»
9	Интегрирование уравнений движения
10	Теорема об изменении кинетической энергии
11	Промежуточный контроль по разделу «Динамика»
12	Принцип возможных перемещений
13	Уравнение Лагранжа II рода
14	Промежуточный контроль по разделу «Аналитическая механика»

СТАТИКА

1. Равновесие различных систем сил

Для равновесия любой системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор системы сил и ее главный момент относительно любого центра были равны 0

$$\overline{R} = 0,\ \overline{M}_0 = 0.$$

Равновесие пространственной системы произвольно расположенных сил. Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей были равны нулю:

$$\left.\begin{aligned}&\sum F_{kx}=0,\quad \sum F_{ky}=0,\quad \sum F_{kz}=0;\\&\sum m_x(\overline{F}_k)=0,\quad \sum m_y(\overline{F}_k)=0,\quad \sum m_z(\overline{F}_k)=0.\end{aligned}\right\}$$

Равновесие пространственной системы параллельных сил (например, ось z будет параллельна векторам сил). Для равновесия пространственной системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось, параллельную силам, и суммы их моментов относительно двух других координатных осей были равны нулю:

$$\sum \overline{F}_{kz} = 0,\ \sum m_x(\overline{F}_k) = 0,\ \sum m_y(\overline{F}_k) = 0.$$

Равновесие системы сходящихся сил. Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая, а, следовательно, и главный вектор этих сил были равны нулю.

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_k = 0.$$

Условие равновесия в геометрической форме. Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнутым.

Условия равновесия в аналитической форме. Модуль главного вектора системы сил

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0,$$

когда одновременно

$$R_x = 0,\ R_y = 0,\ R_z = 0,$$

т. е., когда

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky}=0,\ \sum F_{kz} = 0.$$

Для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.

Для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из двух координатных осей были равны нулю.

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky}=0.$$

Равновесие плоской системы произвольных сил. Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю.

$$\sum F_{kx}=0,\quad \sum F_{ky}=0,\quad \sum m_0(\overline{F}_k)=0$$

Другая форма условий равновесия: для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно каких-нибудь двух центров *A* и *B* и сумма их проекций на ось *Ox*, не перпендикулярную прямой *AB*, были равны нулю:

$$\sum m_A(\overline{F}_k)=0,\quad \sum m_B(\overline{F}_k)=0,\quad \sum F_{kx}=0.$$

Равновесие плоской системы параллельных сил. В случае, когда все действующие на тело силы параллельны друг другу, можно направить ось Ох перпендикулярно силам, а ось *Оу* параллельно векторам сил.

В результате для параллельных сил останется две формы условия равновесия:

$$\sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_0(\overline{F}_k) = 0\,;$$

Другая форма условий равновесия

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0, \quad \sum m_B(\overline{F}_k) = 0,$$

при этом точки *А* и *В* не должны лежать на прямой, параллельной векторам сил.

Проекция силы на ось - алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси.

Проекция силы на ось считается положительной, если направление вектора силы совпадает с направлением оси.

Алгебраический момент силы $\overline{F}$ относительно центра *О* равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на ее плечо, т. е.

$$m_0(\overline{F}) = \pm F h.$$

При этом момент считается положительным, когда сила стремится повернуть тело вокруг центра *О* против хода часовой стрелки, и отрицательным - по ходу часовой стрелки.

Момент проекции вектора силы на плоскость перпендикулярную оси относительно точки пересечения оси с этой плоскостью называется ***моментом силы*** $\overline{F}$ ***относительно оси***.

Момент силы относительно оси будет иметь знак плюс, когда с положительного конца оси поворот, который стремится совершить сила $\overline{F}_{xy}$, виден происходящим против хода часовой стрелки, и знак минус - когда по ходу часовой стрелки.

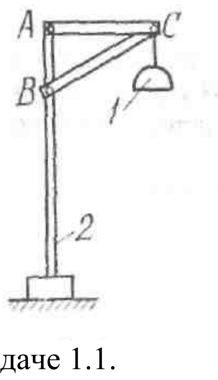
Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.1. Фонарь 1 системы освещения рабочего уступа карьера укреплен на переносной опоре 2 с помощью горизонтальной поперечины *АС* и подкоса *ВС*. Найти усилия S_1 и S_2 соответственно в поперечине и подкосе, если вес фонаря *G* - 500 Н; l_{AC} = 0,85 м; l_{BC} = 1,0 м; крепления в точках *А, В* и *С* шарнирные.

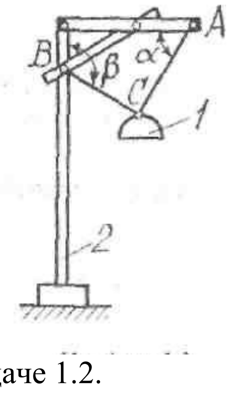
Ответ: S_1= 850 Н; S_2 =1000 Н (подкос сжат).

Задача 1.2. Фонарь 1 освещения участка карьера подвешен к переносной опоре 2 на шнуре *АС* и притянут к столбу опоры тросом *ВС*. Вес фонаря *G* = 500 Н; α = 60°; β = 120°. Определить натяжение шнура S_{AC} и троса S_{BC}.

Ответ: S_{AC} = 433 Н; S_{BC} = 250 Н.



К задаче 1.1.



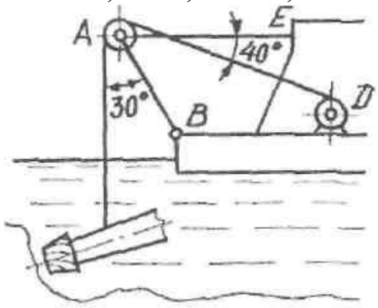
К задаче 1.2.

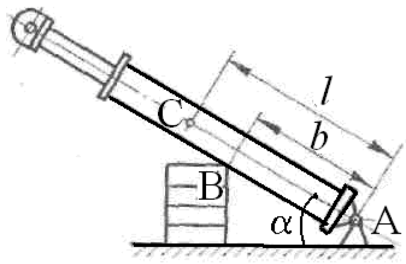
Задача 1.3. Всасывающий патрубок рабочего органа земснаряда подвешен на канате, намотанном на барабан лебедки *D* и огибающем блок *A*. Блок укреплен на штанге *AB*, шарнирно закрепленной в точке *B* и удерживаемой оттяжкой *AE*. Определить усилия в штанге и оттяжке, если натяжение каната равно 0,4 кН; весом штанги и размерами блока *A* пренебречь.

Ответ: S_{AB} = 0,76 кН; S_{AE} = 0,073 кН.

Задача 1.4. При монтаже призабойной крепи шарнирно закрепленную в точке *A* гидростойку опустили на временную опору *B*. Определить реакции опор *A* и *B*, если вес гидростойки G = 6 кН и приложен в точке С. При расчетах принять b= 0,5 м, l = 0,7 м, $\alpha = 30^o$.

Ответ: R_A = 3,65кН; R_B = 7,27 кН.





К задаче 1.3. К задаче 1.4.

Задача 1.5. Определить модуль равнодействующей двух равных по модулю сходящихся сил $F_1 = F_2$ = 5Н, образующих между собой угол $\alpha = 45^o$.

Ответ: 9,24 Н

Задача 1.6. Равнодействующая сходящихся сил $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ равна по модулю 8 Н и образует с горизонталью угол $\alpha = 30^o$. Вектор силы $\overline{F_1}$ направлен по горизонтальной оси, а вектор силы $\overline{F_2}$ образует с этой осью угол $\beta = 60^o$.

Ответ: 4,62 Н

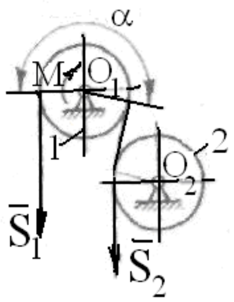
Задача 1.7. Определить давление на оси ведущего 1 и отклоняющего 2 шкивов многоканатной подъемной машины при их равномерном вращении под действием крутящего момента *M*, если суммарное натяжение набегающих ветвей канатов S_1 = 147 кН, суммарное натяжение сбегающих ветвей S_2 = 113 кН, вес шкивов: G_1 = 77 кН, G_2 = 22 кН; угол обхвата α = 190°. Трением в подшипниках пренебречь.

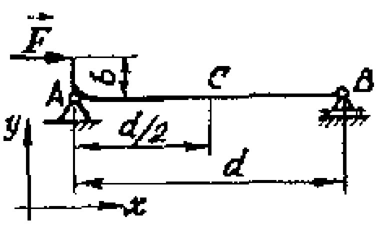
Ответ: R_{01} = 335,9 кН; R_{02} =30,8 кН.

Задача 1.8. На рисунке к задаче изображена расчетная схема буровой штанги: балка *AB* находится под действием эксцентрично приложенного усилия *F*; размеры *b* и *d* заданы. Найти реакции опор *A* и *B* и изгибающий момент M_C в сечении *C*.

Примечание. Изгибающим моментом в сечении называется алгебраическая сумма моментов всех сил, действующих на балку по какую-нибудь одну сторону от сечения, относительно центра тяжести сечения.

Ответ: $X_A = -F$; $Y_A = -F\ b/d$; $R_B = F\ b/d$; $M_C = 0{,}5F\ b$.



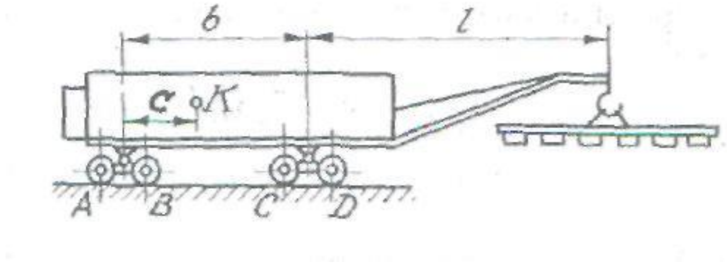


К задаче 1.7. К задаче 1.8.

Задача 1.9. Определить давление колесных пар четырехосного железнодорожного крана на рельсы в точках A, B, C и D). Вес крана G приложен в точке K, вес груза равен Q. Размеры приведены на рисунке к задаче.

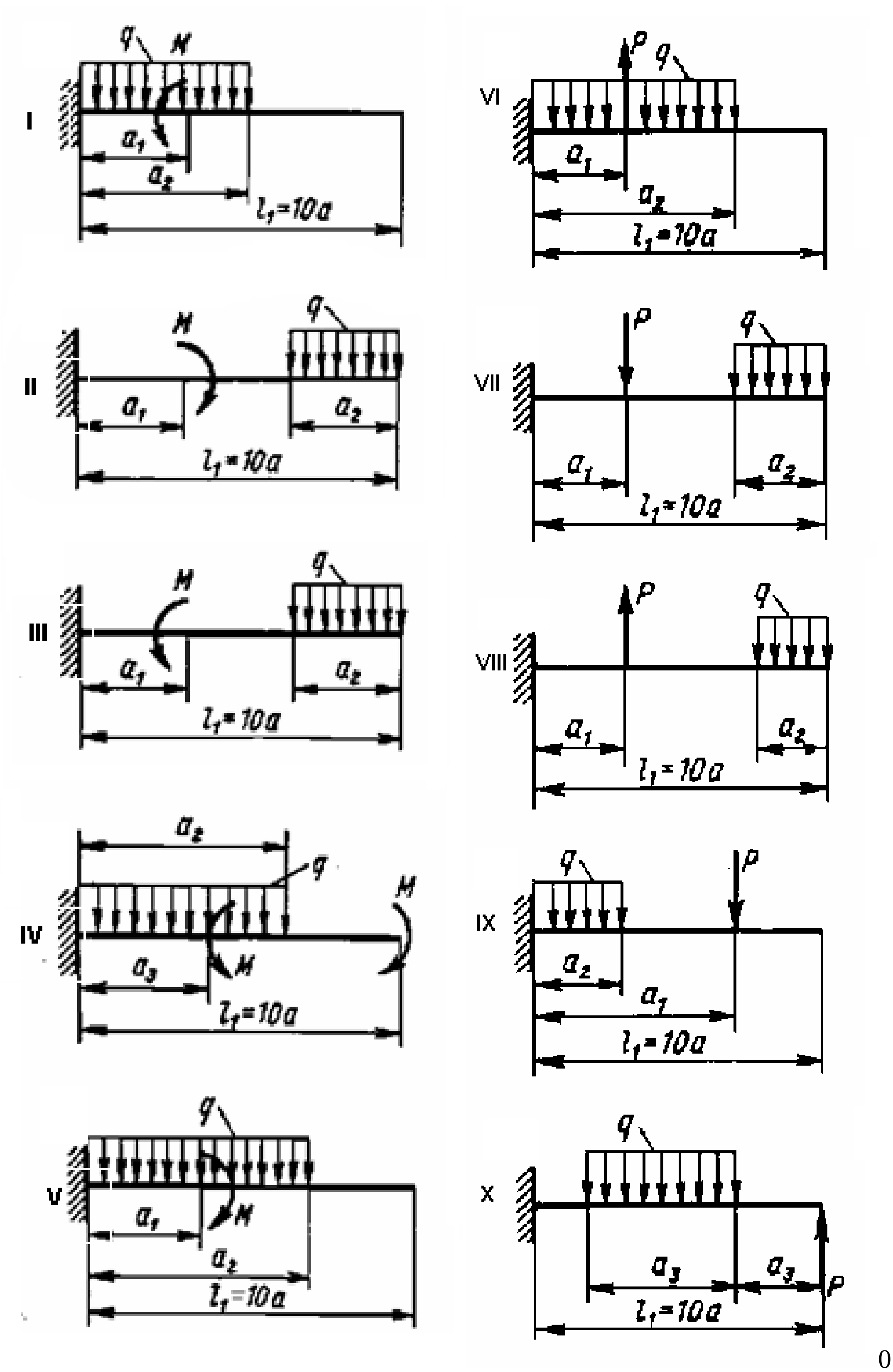
Ответ: $N_A = N_B = 0{,}5[G\,(b - c) - Ql]/b$;

$N_C = N_D = 0{,}5[Gc + Q(b + l)]/b$.



К задаче 1.9.

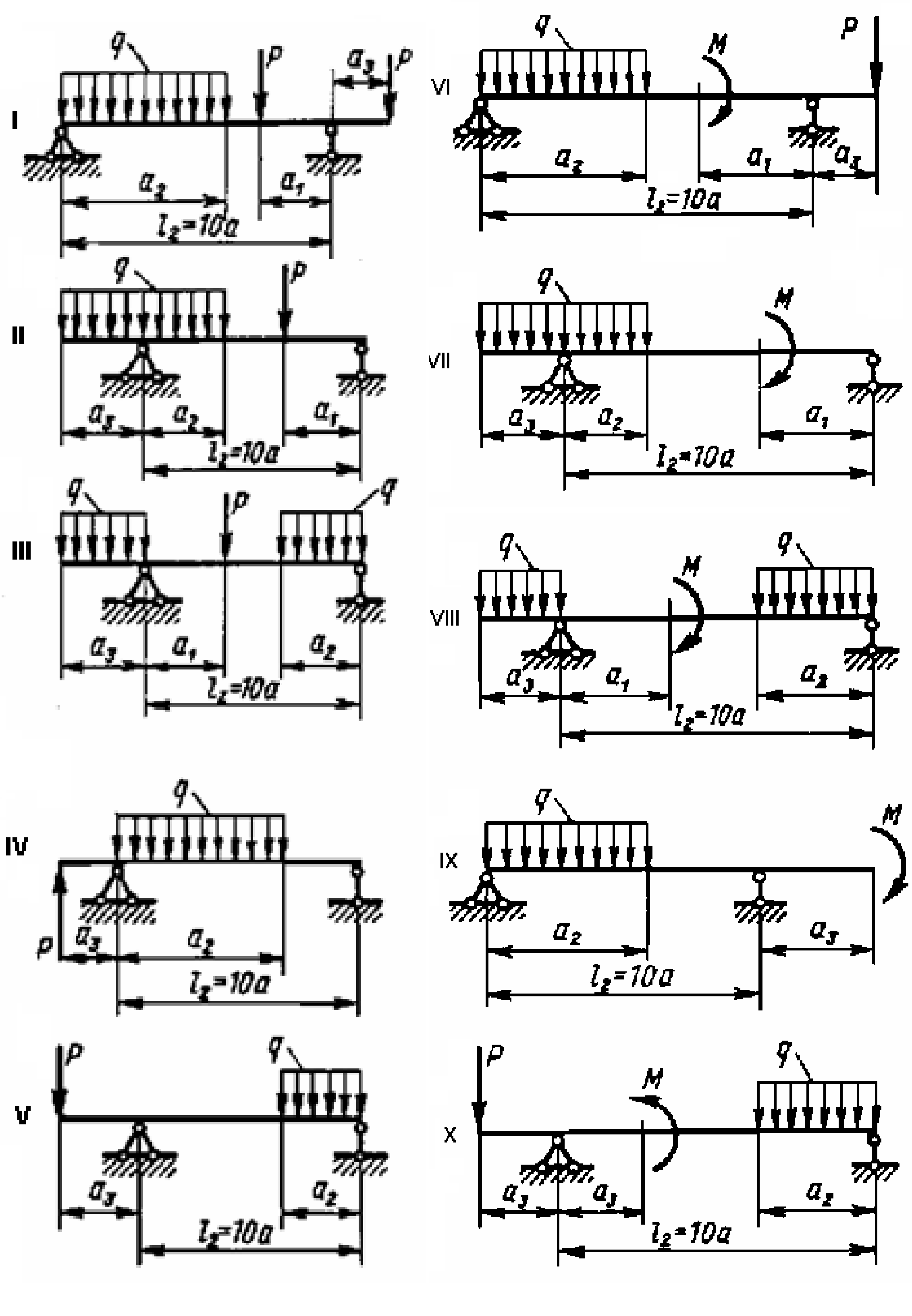
Задача 1.10. Определить реакции опор консольной балки, изображенной на рисунке. Данные, необходимые для расчетов, приведены в таблице 1.



0

К задаче 1.10

Задача 1.11. Определить реакции опор балки на опорах, изображенной на рисунке. Данные, необходимые для расчетов, приведены в таблице 1.



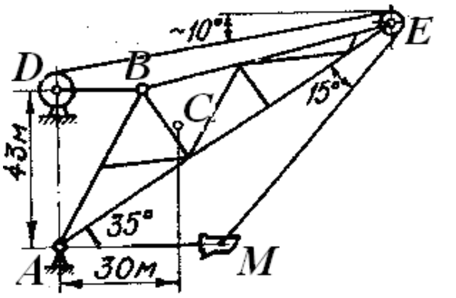
К задаче 1.11

Таблица 1.

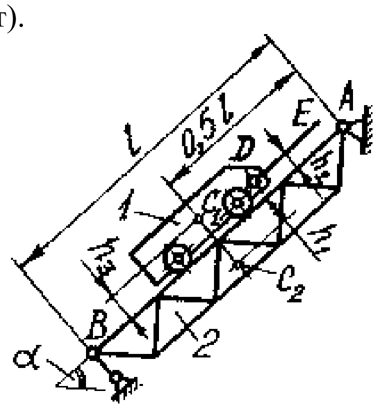
Номер варианта	Длина, м		Расстояние в долях пролета			Момент пары сил M, кН·м	Сосредоточенная сила P, кН	Интенсивность распределенной нагрузки q, кН/м
	l_1	l_2	a_1	a_2	a_3			
1	1,1	6	1a	8 a	1 a	10	10	10
2	1,2	7	2 a	7 a	2 a	20	20	20
3	1,3	3	3 a	5 a	3 a	30	30	30
4	1,4	4	4 a	4 a	4 a	40	40	40
5	1,5	5	5 a	3 a	5 a	50	50	50
6	1,6	6	6 a	6 a	1 a	60	60	60
7	1,7	7	7 a	7 a	2 a	70	70	70
8	1,8	8	8 a	8 a	3 a	80	80	80
9	1,9	9	9 a	9 a	4 a	90	90	90
10	2,0	10	10 a	1 a	5 a	10	10	10

Задача 1.12. Определить натяжение канатов *AM* и *MED*, несущих ковш *M* экскаватора –драглайна, а также реакции опор стрелы; шарнире *A* и невесомом стержне *BD*. Вес ковша $G_к$ = 3 МН, вес стрелы G_C = 1,4 МН и приложен в точке С; l_{AE} = 100 м; остальные размеры показаны на рисунке. Размерами блоков и трением пренебречь.

Ответ: T_{AM} = 2,52 МН; T_{ME} = 3,92 МН; R_A = 7,75 МН;
R_B = - 0,52 МН (стержень сжат).



К задаче 1.12



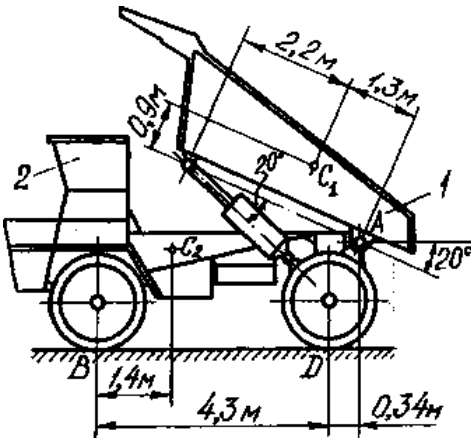
К задаче 1.13

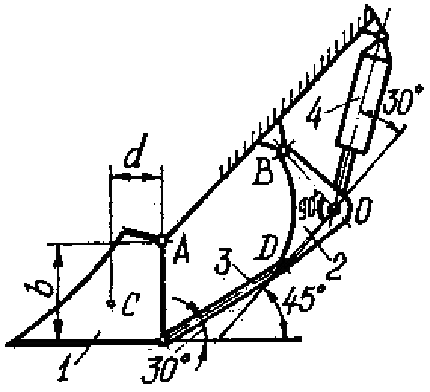
Задача 1.13. Скип 1 весом Q = 750 кН равномерно поднимается канатом *DE* по наклонной эстакаде 2, вес которой G = 4000 кН. Определить, пренебрегая сопротивлением вращению колес скипа, натяжение T_{DE} каната *DE* и реакции опор эстакады: R_A шарнира *A* и R_B невесомого стержня *BC*, если l = 50 м; h_1= 2 м; h_2 = 0,8 м; h_3 = 1,2 м; $\alpha = 45^o$; C_1 и C_2 – центры тяжести соответственно скипа и эстакады.

Ответ: T_{DE} = 530,3 кН; R_A = 3346,3 кН; R_B = 1570,5 кН.

Задача 1.14. Кузов 1 самосвала 2 поворачивается вокруг оси шарнира *A* под действием гидроцилиндра. Определить усилие *S* в гидроцилиндре, реакцию R_A шарнира и давление колес на грунт в точках В и *D*, если вес груженого кузова G_1 = 360 кН и приложен в точке C_1; вес самосвала без кузова G_2 = 194 кН и приложен в точке C_2; размеры показаны на рисунке.

Ответ: S = 274,8 кН; R_A = 279,2 кН; N_B = 178,9 кН; N_D = 375,1 кН.





К задаче 1.14 К задаче 1.15

Задача 1.15. Механизм поворота ковша гидравлического экскаватора включает ковш 1 весом G = 320 кН, приложенным в точке C, угловой рычаг 2, тягу 3 и гидроцилиндр 4. Определить реакции в шарнирах A и B и усилия $S3$ в тяге и $S4$ в гидроцилиндре при заданных размерах b= 1,5 м; d= 0,8 м; $l_{OB} = l_{OD}$.

Ответ: R_A = 452 кН; R_B=S_3 = 197,1 кН; S_4 = 278,7 кН.

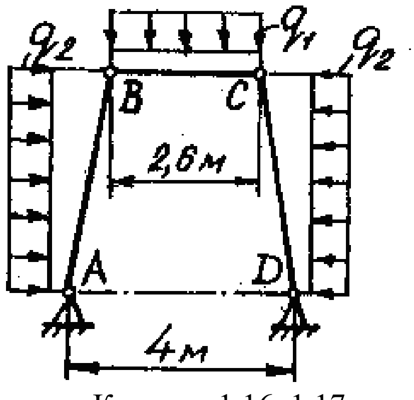
Задача 1.16. Определить реакции в шарнирах трапециевидной крепи под действием вертикального и горизонтального горного давления: q_1 = 80 кН/м; q_2 = 4 кН/м.

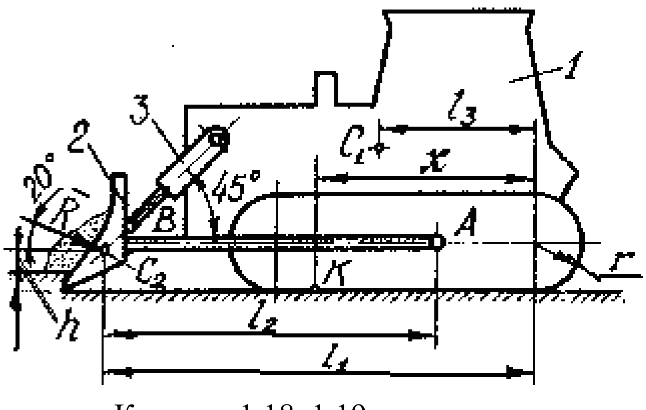
Ответ: $X_A = X_B$ = 15,1 кН; $Y_A = Y_B$ = 160 кН;

$X_B = X_C$ = 31,1 кН; $Y_B = Y_C$ = 104 кН;

Задача 1.17. Определить усилия, сжимающие стойки AB и CD, учитывая условие задачи 1.16.

Ответ: $S_{AB} = S_{CD}$ = 107,8 кН.





К задаче 1.16, 1.17 К задаче 1.18, 1.19

Задача 1.18. Бульдозер (трактор 1с отвалом 2) движется равномерно по горизонтальной площадке, срезая слой грунта. Сопротивление копанию R = 110 кН; силы веса G_1= 174 кН и G_2 = 14 кН и приложены соответственно в точках C_1 и C_2; l_1 = 4,7 м; l_2 = 3,3 м; l_3= 2,2 м; r= 0,5 м; h= 0,2 м. Определить нормальную реакцию N_K грунта и координату x точки ее приложения (центра давления).

Ответ: N_K = 225,6 кН; x = 2,68 м;

Задача 1.19. Найти также силу сцепления F_f гусениц с грунтом, суммарное усилие S_3 в гидроцилиндрах 3, удерживающих отвал, и реакцию R_A шарнира A бруса AB, жестко связанного с отвалом учитывая условие задачи 1.18.

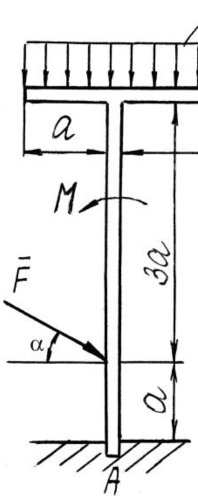
Ответ: F_f = 103,4 кН; S_3 = 94,9 кН; R_A = 176,9 кН.

Задача 1.20. Жесткая рама заделана в бетонное основание. На нее действуют сила $\overline{\mathbf{F}}$ величина которой 5 кН, равномерно распределенная нагрузка интенсивности q = 10 кН/м, а также пара сил с моментом M = 5 кН м.

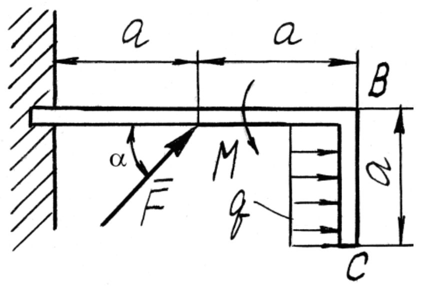
Определить реакцию жесткой заделки при α = 30° и α = 60°, если a = 2м

Задача 1.21. Рама ABC жестко заделана в стену. На нее действуют сила $\overline{F}$, величина которой 5 кН, равномерно распределенная нагрузка интенсивности q = 10 кН/м, а также пара сил с моментом M = 5 кН м.

Определить реакцию жесткой заделки при α = 30° и α = 60°, если a = 2м



К задаче 1.20



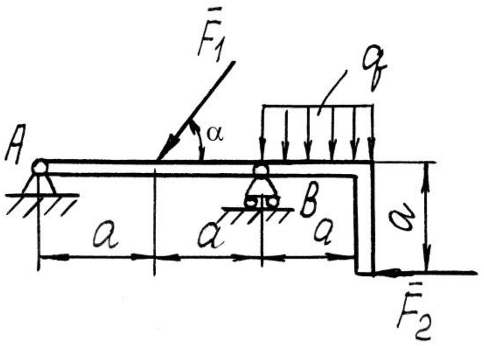
К задаче 1.21

Задача 1.22. Жесткая рама закреплена на двух опорах в точках А и В. На нее действуют силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, величины которых соответственно равны 3 кН и 2 кН равномерно распределенная нагрузка интенсивности q = 10 кН/м.

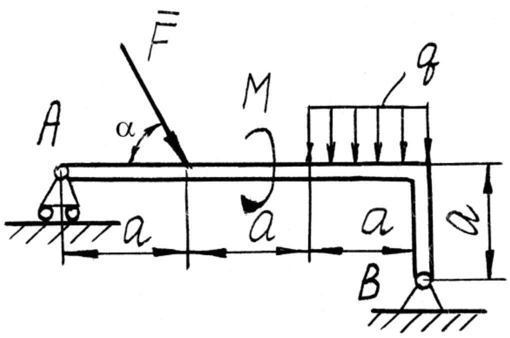
Определить реакции в опорах A и B при α = 30° и α = 60°, если a = 2 м.

Задача 1.23. Жесткая рама закреплена на двух опорах в точках А и В. На нее действуют сила $\overline{F}$, величина которой 4 кН, равномерно распределенная нагрузка интенсивности q = 10 кН/м, а также пара сил с моментом M = 5 кН м.

Определить реакции опор A и B при α = 30° и α = 60°, если a = 2 м.



К задаче 1.22



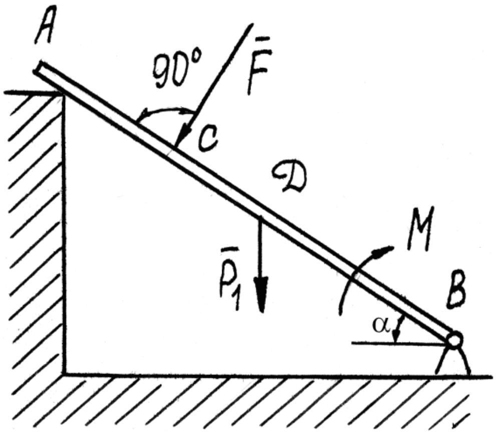
К задаче 1.23

Задача 1.24. Однородная балка АВ весом $P_1 = 10\,H$ и длиной 6 м опирается концом A на выступ стены, а в точке B закреплена шарнирно-неподвижной опорой. На балку действуют сила $\overline{F}$, величина которой 5 кН, и пара сил с моментом M = 10 кНм.

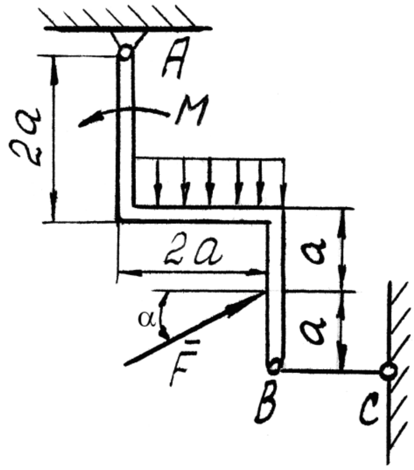
Определить реакции опор в точках A и B при α = 30° и α = 60°, если AC = $СД$.

Задача 1.25. Жесткая рама закреплена в точке А шарнирно-неподвижной опорой и удерживается в данном положении невесомым стержнем ВС. На раму действуют сила $\overline{F}$ равная 20 кН, равномерно распределенная нагрузка интенсивности q = 10 кН/м и пара сил с моментом M = 12 кНм.

Определить реакцию в опоре A и усилие в стержне BC при $\alpha = 30^o$ и $\alpha = 60^o$, если $a = 2$ м.



К задаче 1.24



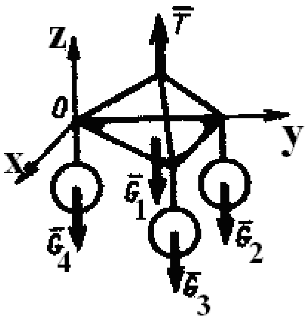
К задаче 1.25

Задача 1.26. Определить натяжение каната T, если к нему прикреплена платформа весом $G_1 = 0{,}5$ кН с грузами $G_2 = 10$ кН, $G_3 = 6$ кН и $G_4 = 8$ кН.

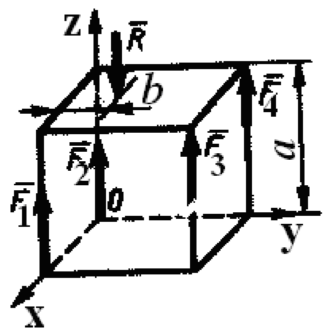
Ответ: $T = 24{,}5$ кН

Задача 1.27. К кубу приложены силы $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$ и $\overline{F_4}$, которые уравновешены силой $\overline{R}$. Определить расстояние b силы $\overline{R}$ от плоскости Oxz, если ребро куба $a = 1$ м, $F_1 = F_2 = 15$ кН, $F_3 = F_4 = 5$ кН и $R = 40$ кН.

Ответ: $b = 0{,}25$ м



К задаче 1.26



К задаче 1.27

Задача 1.28. К фундаменту весом G =100 кН прикреплена консольная балка AB параллельная оси Oy. Определить минимальное значение силы Q, под действием которой фундамент опрокинется вокруг ребра Ox, если его ширина a = 0,5 м, вылет балки b = 5 м. Весом балки пренебречь.

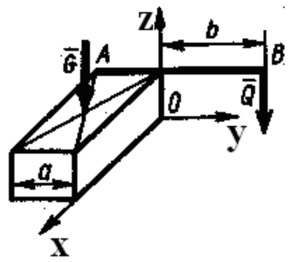
Ответ: Q = 5 кН

Задача 1.29. Горизонтальная однородная пластина $ABCD$ весом $G = 500$ кН подвешена в точках A, D, E к трем вертикальным стержням 1, 2, 3. Определить усилие в стержне 1, если $AD = 2\,AE$

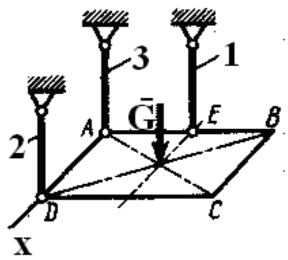
Ответ: $S_1 = 500$ кН

Задача 1.30. Однородное тело весом $G = 60$ кН под действием наложенных связей находится в равновесии. Составив уравнение моментов относительно оси Ox, определить вертикальную составляющую реакции шарнира B, если размер $a = 0{,}1$ м/

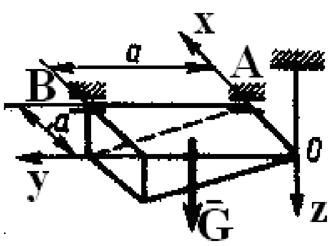
Ответ: $R_{BZ} = 40$ кН



К задаче 1.28



К задаче 1.29



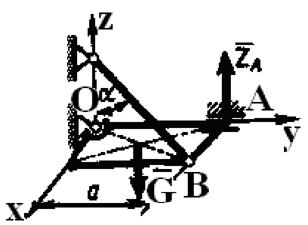
К задаче 1.30

Задача 1.31. Однородная плита *OABC* весом $G = 30$ кН удерживается в горизонтальном положении шарнирами *O*, *A* и тросом *BD*. Определить натяжение троса T_{BD}, если $a = 2$ м и угол $\alpha = 60^{\circ}$.

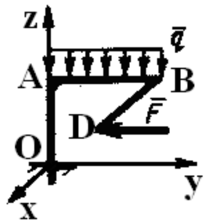
Ответ: $T_{BD} = 30$ кН

Задача 1.32. Ломаный брус *OABD* находится в равновесии. Определить вертикальную составляющую реакции заделки, если дано: OA = 1,7 м; AB = 2 м; *BD* = 3,4 м; *BD* // *Ox*. Сила F = 1 МН и интенсивность нагрузки q = 2 МН/м.

Ответ: $R_{OZ} = 4$ МН .



К задаче 1.31

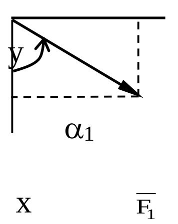
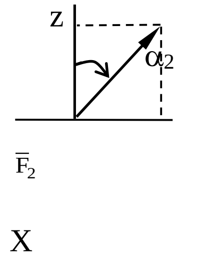
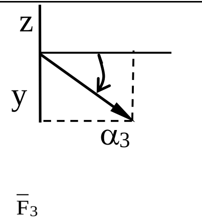
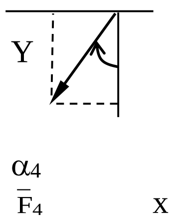


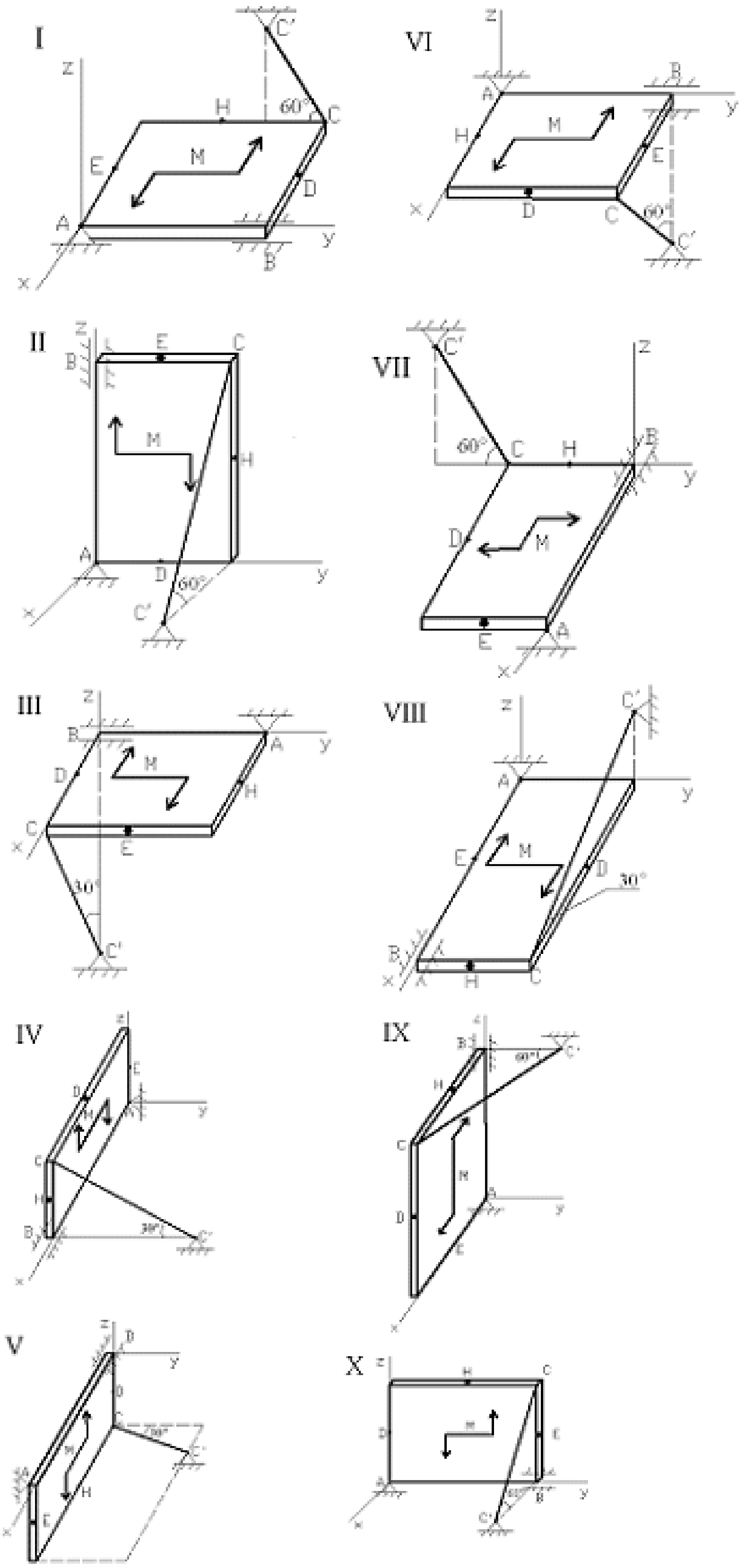
К задаче 1.32

Задача 1.33. Однородная прямоугольная плита весом $P = 3$ кН со сторонами $AB = 3l$, $BC = 2l$ закреплена в точке *A* сферическим шарниром, а в точке B цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем *CC'*. На плиту действуют две силы и пара сил, лежащая в плоскости плиты, с моментом $M = 5$ кН·м. Величины сил, их направления и точки приложения указаны в табл. 2; при этом силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_4$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости xy, сила $\bar{F}_2$ – в плоскости, параллельной *xz*, и сила $\bar{F}_3$ – в плоскости, параллельной *yz*. Точки приложения сил (*D, E, H*) находятся в серединах соответствующих сторон плиты. Определить реакции связей в точках *A, B, C*. При расчетах принять $l = 0{,}8$ м.

Указания. При решении задачи следует учесть, что реакция сферического шарнира имеет три составляющие, а реакции цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При вычислении моментов силы $\bar{F}$ удобно разложить ее на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, параллельные координатным осям, тогда по теореме Вариньона $m_x(\bar{F}) = m_x(\bar{F}') + m_x(\bar{F}'')$ и т.д.

Таблица 2.

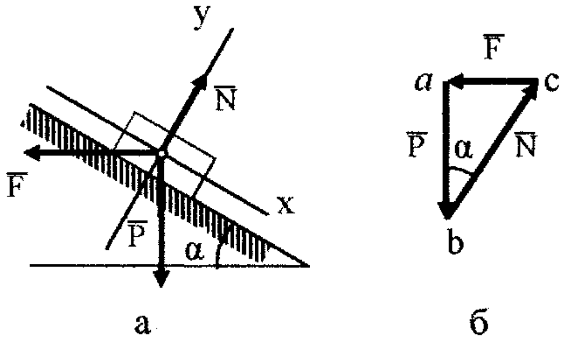
Номер варианта	Силы							
	$F_1 = 4$ кН		$F_2 = 6$ кН		$F_3 = 8$ кН		$F_4 = 10$ кН	
								
	Точка прило-же-ния	α_1, град	Точка прило-жения	α_2, град	Точка прило-жения	α_3, град	Точка прил-о-же-ния	α_4, град
1	D	60	–	–	E	0	–	–
2	H	90	D	30	–	–	–	–
3	–	–	E	60	–	–	D	90
4	–	–	–	–	E	30	H	0
5	E	0	–	–	H	60	–	–
6	–	–	D	60	H	0	–	–
7	–	–	H	30	–	–	D	90
8	E	30	H	90	–	–	–	–
9	–	–	–	–	D	0	E	60
10	–	–	E	90	D	30	–	–



К задаче 1.33

Примеры решения задач

Задача 1. Груз весом P лежит на гладкой наклонной плоскости с углом наклона α (рис. *а*). Определить значение горизонтальной силы $\overline{F}$, которую надо приложить к грузу, чтобы удержать его в равновесии, и найти, чему при этом равна сила давления $\overline{Q}$ груза на плоскость.



К задаче 1.

Решение. Искомые силы действуют на разные тела: сила $\overline{F}$ на груз, сила $\overline{Q}$ — на плоскость. Для решения задачи рассмотрим равновесие груза. Поэтому вместо силы $\overline{Q}$ будем искать равную ей по модулю, но противоположно направленную реакцию плоскости $\overline{N}$. Тогда заданная сила $\overline{P}$ и искомые силы $\overline{F}$ и $\overline{N}$ будут действовать на груз, т. е. на одно то же тело. Изобразим действующие на этот груз силы $\overline{P}$ и $\overline{F}$ и реакцию связи $\overline{N}$.

Рассмотрим два способа решения задачи.

Геометрический способ. При равновесии треугольник, построенный из сил $\overline{P}$, $\overline{F}$ и $\overline{N}$, должен быть замкнутым. Построение треугольника начинаем с заданной силы $\overline{\mathrm{P}}$ (рис., б). Через начало и конец этой силы проводим прямые, параллельные направлениям сил $\overline{F}$ и $\overline{N}$. Точка пересечения этих прямых дает третью вершину замкнутого силового треугольника *abc*, в котором стороны *bc* и *ca* равны в выбранном масштабе искомым силам. Направление сил определяется правилом стрелок: так как здесь равнодействующая равна нулю, то при обходе треугольника острия стрелок нигде не должны встречаться в одной точке.

Модули искомых сил можно из прямоугольного треугольника *abc* найти и путем численного расчета:

$F = P \operatorname{tg} \alpha$, $N = P / \cos \alpha$.

Аналитический способ. Так как система действующих сходящихся сил является плоской, для нее надо составить два уравнения условия равновесия. Сначала проводим координатные оси; при этом для получения более простых уравнений ось x направляем перпендикулярно неизвестной силе $\overline{N}$. Теперь составляем уравнения проекции сил $\overline{P}$, $\overline{F}$, $\overline{N}$ на оси x и y

$\sum F_{kx} = 0$; $P \sin \alpha - F \cos \alpha = 0$;

$\sum F_{ky} = 0$; $- P \cos \alpha - F \sin \alpha + N = 0$.

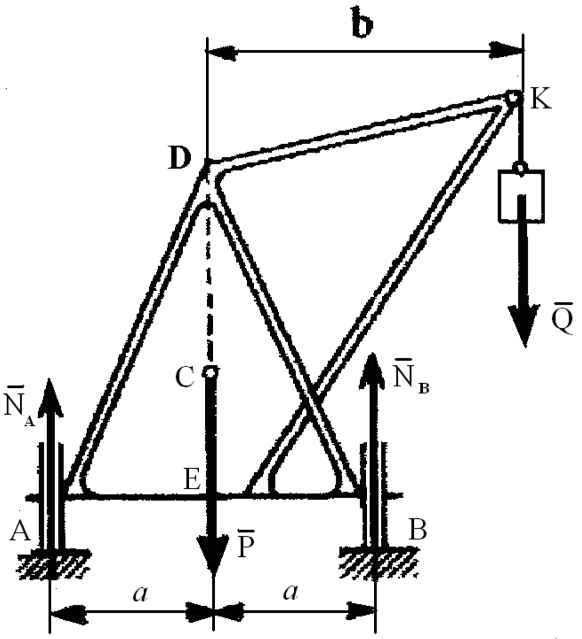
Решая эти уравнения, найдем:

$F = P \operatorname{tg} \alpha$,

$N = P \cos \alpha + P \sin^2 \alpha / \cos \alpha = P / \cos \alpha$.

Искомая сила давления груза $\overline{Q}$ на плоскость численно равна N, но направлена в противоположную сторону ($\overline{Q} = \overline{N}$).

Задача 2. Определить силы, с которыми давят на рельсы колеса A и B крана, схематически изображенного на рис. Вес крана $P = 40$ кН, центр тяжести его лежит на линии DE. Вес поднимаемого груза $Q = 10$ кН, вылет крана $b = 3{,}5$ м, расстояние $AB = 2\,a = 2{,}5$ м.



К задаче 2

Решение. Рассмотрим равновесие всего крана. На кран действуют заданные силы $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ и реакции связей $\overline{N}_A$ и $\overline{N}_B$. Для этой системы параллельных сил составляем условия равновесия, принимая за центр моментов точку A и проецируя силы на вертикальную ось. Получим:

$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0$; $-P \cdot a + N_B \cdot 2a - Q\,(a+b) = 0$;

$\sum F_{ky} = 0$; $N_A + N_B - P - Q = 0$.

Решая эти уравнения, найдем значения реакций связей:

$N_A = 0{,}5\,P - 0{,}5\,Q\,(b/a - 1) = 11$ кН;

$N_B = 0{,}5\,P + 0{,}5\,Q\,(b/a + 1) = 39$ кН.

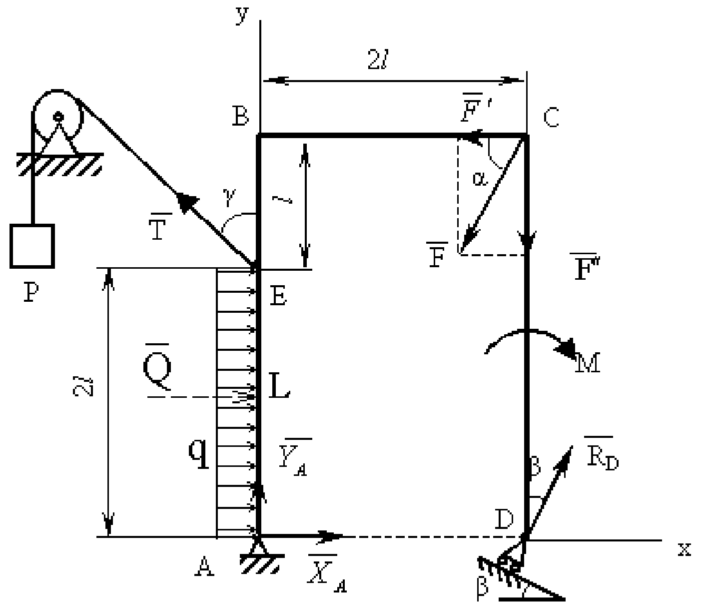
Для проверки составим уравнение моментов относительно центра B

$\sum m_B(\overline{F}_k) = 0$; $-N_A \cdot 2a + P\,a - Q(b - a) = 0$.

Подставляя сюда найденное значение N_A, убеждаемся, что уравнение удовлетворяется. Искомые силы давления колес на рельсы равны численно N_A и N_B, но направлены вниз.

Из найденного решения видно, что при $Q = a \cdot P/(b - a) = 22{,}2$ кН реакция N_A обращается в ноль и левое колесо перестает давить на рельс. При дальнейшем увеличении нагрузки Q кран начинает опрокидываться. Наибольшая нагрузка Q, при которой сохраняется равновесие крана, определяется из условия $\sum m_B(\overline{F}_k) = 0$, где $\overline{F}_k$ — действующие на кран заданные силы (в данной задаче — силы тяжести).

Задача 3. Жесткая прямоугольная рама $ABCD$ имеет в точке A неподвижную шарнирную опору, и в точке D – подвижную шарнирную опору на катках. В точке E к раме прикреплен трос с подвешенным на нем грузом, имеющем вес $P = 25$ кН. На раму действуют силы: $F = 30$ кН, пара сил $M = 40$ кНм, равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = 10$ кН/м (рис.). Определить реакции опор в точках A и D, вызываемые действующими нагрузками. В расчетах принять $\alpha = 60°$, $\gamma = 45°$, $\beta = 30°$, $l = 0{,}5$ м.



К задаче 3

Решение. Рассмотрим равновесие рамы. Проведем координатные оси x и y, изобразим действующие на раму силу $\overline{F}$, пару сил с моментом M, натяжение троса $\overline{T}$ (по модулю $T = P$). Заменим связи их реакциями: реакции связей, реакцию неподвижной шарнирной опоры A изображаем двумя её составляющими $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$, реакция $\overline{R}_D$ шарнирно-подвижной опоры D направлена перпендикулярно опорной плоскости. Равномерно распределенную нагрузку следует заменить равнодействующей сосредоточенной силой $Q = q\cdot 2l = 10\cdot 2\cdot 0{,}5 = 10$ кН. Вектор $\overline{Q}$ приложен к середине отрезка AE (точка L) и направлен в сторону действия распределенной нагрузки.

Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\overline{F}$ относительно точки A, разложим её на составляющие, численно равные $F' = F\cdot\cos\alpha$ и $F'' = F\cdot\sin\alpha$

$\sum F_{kx}=0$; $\quad X_A + R_D \sin\beta - F\cos\alpha - T\sin\gamma + Q = 0$;

$\sum F_{ky}=0$; $\quad Y_A + R_D \cos\beta - F\sin\alpha + T\cos\gamma = 0$;

$\sum m_A(\overline{F}_k)=0$; $\quad - M + R_D\cos\beta\, 2l + F\cos\alpha\, 3l - F\sin\alpha\, 2l + T\sin\gamma\, 2l - Q\, l = 0$.

Выражаем из полученных уравнений неизвестные и вычисляем значения искомых величин:

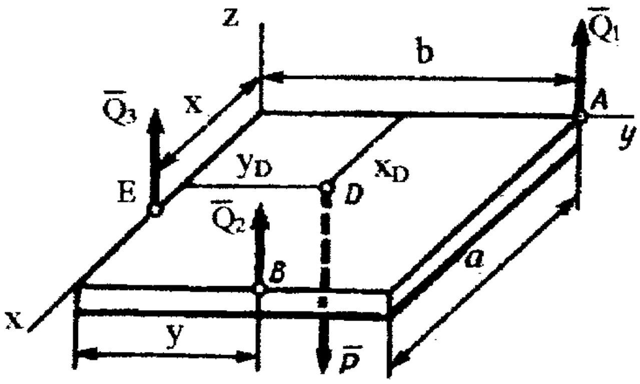
$X_A = 7{,}8$ кН;

$Y_A = - 22{,}4$ кН;

$R_D = 35{,}4$ кН.

Знак “минус“ перед величиной Y_A означает, что эта сила имеет направление обратное, указанному на рисунке.

Задача 4. На прямоугольной плите со сторонами a и b лежит груз. Центр тяжести плиты вместе с грузом находится в точке D с координатами x_D, y_D (рис.). Один из рабочих удерживает плиту за угол A. В каких точках B и E должны поддерживать плиту двое других рабочих, чтобы силы, прикладываемые каждым из удерживающих плиту, были одинаковы.



К задаче 4

Решение. Рассматриваем равновесие плиты, которая является свободным телом, находящимся в равновесии под действием четырех параллельных сил $\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \overline{Q}_3, \overline{P}$, где $\overline{P}$ - сила тяжести. Составляем для этих сил условия равновесия, считая плиту горизонтальной и проводя оси так, как показано на рисунке.

$\sum F_{kz}=0;\ Q_1 + Q_2 + Q_3 - P = 0;$

$\sum m_x(\overline{F}_k)=0;\ Q_1 b + Q_2 y - P y_D = 0;$

$\sum m_y(\overline{F}_k)=0;\ - Q\, 2a - Q_3 x + P x_D = 0.$

По условию задачи должно выполняться $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$. Тогда из первого уравнения $P = 3Q$. Подставляя это значение P в остальные уравнения, найдем окончательно $x = 3x_D - a$, $y = 3y_D - b$.

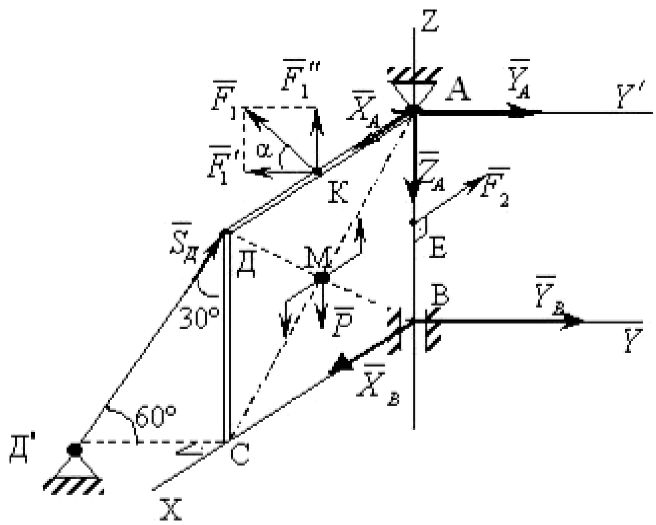
Решение возможно, когда

$a/3 \le x_D \le 2a/3;$

$b/3 \le y_D \le 2b/3.$

При $x_D = a/3$, $y_D = b/3$ получим $x = y = 0$, а при $x_D = 2a/3$, $y_D = 2b/3$ будет $x = a$, $y = b$. Когда точка D в центре плиты, $x = a/2$, $y = b/2$.

Задача 5. Вертикальная прямоугольная плита весом P = 5 кН (рис.) закреплена сферическим шарниром в точке A, цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке B и невесомым стержнем $ДД'$, лежащим в плоскости, параллельной плоскости yz. На плиту действуют сила F_1 = 6 кН (в плоскости yz, α = 30°), сила F_2 = 7,5 кН (параллельная оси x) и пара сил с моментом M = 3 кН (в плоскости плиты). Геометрические размеры плиты AB = 1м, BC = 2м, ; $BE = AE$; $AK = КД$. Определить реакции опор A, B и стержня $ДД'$.



К задаче 5

Решение. Рассмотрим равновесие плиты. На нее действуют заданные силы $\overline{P}, \overline{F}_1, \overline{F}_2$ и пара сил с моментом *M*, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{Z}_A$, цилиндрического (подшипника) – на две составляющие $\overline{X}_B, \overline{Y}_B$, (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника), реакцию $\overline{S}_Д$ стержня направим вдоль стержня, предполагая, что он сжат.

Составляем шесть уравнений равновесия для действующей на плиту пространственной системы сил:

$\sum F_{KX} = X_A + X_B - F_2 = 0;$

$\sum F_{KY} = Y_A + X_B - F_2 \cdot \cos\alpha + S_Д \cdot \sin 30° = 0;$

$\sum F_{KZ} = - Z_A + S_Д \cdot \cos 30° + F_1 \cdot \sin\alpha - P = 0;$

$\sum m_X(\overline{F}_k) = - S_Д \cdot \sin 30° \cdot AB + F_1 \cdot \cos\alpha \cdot AB - Y_A \cdot AB = 0;$

$$\sum m_Y(\overline{F}_k) = - S_Д \cdot \cos 30° \cdot BC - F_1 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{BC}{2} + X_A \cdot AB - F2 \cdot \frac{AB}{2} + P \cdot \frac{BC}{2} + M = 0;$$

$$\sum m_Z(\overline{F}_k) = S_Д \cdot \sin 30° \cdot BC - F_1 \cdot \cos\alpha \cdot \frac{BC}{2} = 0.$$

Силу $\overline{F}_1$ разлагаем на составляющие $\overline{F}_1{}' \; и \; \overline{F}_1{}''$, параллельные осям *Y* и *Z*, $F_1' = F_1 \cdot \cos\alpha$, $F_1'' = F_1 \cdot \sin\alpha$ и для определения момента силы $\overline{F}_1$ относительно оси *Y* применяем теорему Вариньона $m_Y(\overline{F}_1) = m_Y(\overline{F}_1{}') + m_Y(\overline{F}_1{}'')$. Аналогично можно поступить и с силой $\overline{S}_Д$.

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив затем эти уравнения, найдём, чему равны искомые реакции:

$X_A = 7{,}8$ кН;

$Y_A = 2{,}6$ кН;

$Z_A = 2{,}5$ кН;

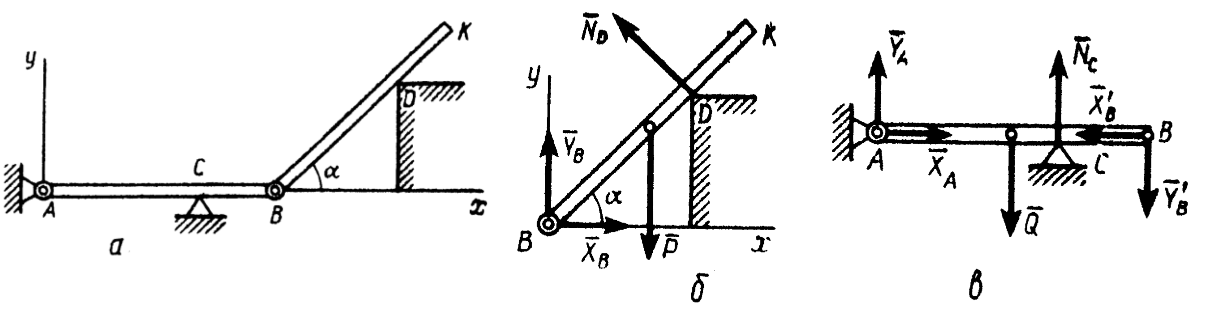
$Y_B = 0$ кН;

$X_B = - 0{,}3$ кН;

$S_Д = 5{,}2$ кН.

Знак минус перед величиной X_B указывает, что сила $\overline{X}_B$ направлена противоположно показанной на рисунке.

Задача 6. Горизонтальная балка *AB* весом *Q* = 200 Н прикреплена к стене шарниром *A* и опирается на опору *C* (рис., *а*). К ее концу *B* шарнирно прикреплен брус *BK* весом *P* = 400 Н, опирающийся на выступ *D*. При этом *CB* = *AB*/3, *DK* = *BK*/3, угол α = 45°. Определить реакции опор, считая балку и брус однородными



К задаче 6

Решение. Расчленяя систему на две части, рассматриваем равновесие бруса *BK* и балки *AB* в отдельности. На брус *BK* (рис., *б*) действуют сила $\overline{P}$ и реакции связей $\overline{N}_D$, $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$. Вводя обозначение *BK* = *a* и составляя для этих сил уравнения равновесия, получим:

$\Sigma F_{кх} = X_B - N_D \sin\alpha = 0;$

$\Sigma F_{ку} = Y_B - P + N_D \cos\alpha = 0;$

$\Sigma m_B(\overline{F_k}) = N_D \cdot 2a/3 - P(a/2)\cos\alpha = 0.$

Решая эти уравнения, найдем:

$N_D = (3P/4)\cos\alpha = 212$ Н;

$X_B = (3P/8)\sin 2\alpha = 150$ Н;

$Y_B = P - (3P/4)\cos 2\alpha = 250$ Н.

На балку *AB* если ее рассматривать отдельно, действуют сила $\overline{Q}$, реакции внешних связей $\overline{N}_C$, $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и силы давления $\overline{X}'_B$ и $\overline{Y}'_B$ бруса *BK*, передаваемые через шарнир *B* (рис., *в*). При этом по закону о действии и противодействии силы $\overline{X}'_B$ и $\overline{Y}'_B$ должны быть направлены противоположно $\overline{X}_B$ и $\overline{Y}_B$; по модулю же $X'_B = X_B$, $Y'_B = Y_B$.

Вводя обозначение $AB = b$ и составляя для сил, действующих на балку, условия равновесия, получим:

$\Sigma F_{kx} = X_A - X'_B = 0;$

$\Sigma m_A(\overline{F_k}) = - Y'_B b + N_C \cdot 2b/3 - Q \cdot b/2 = 0;$

$\Sigma m_C(\overline{F_k}) = - Y_A \cdot 2b/3 + Q \cdot b/6 - Y'_B \cdot b/3 = 0.$

Полагая в этих уравнениях $X'_B = X_B$ и $Y'_B = У_B$ и решая их, найдем неизвестные силы

$X_A = X_B = 150$ Н;

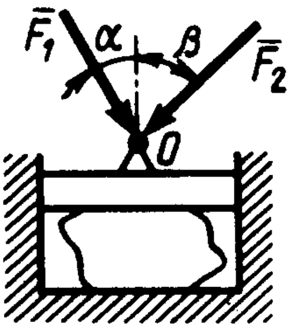
$Y_A = Q/4 - Y_B/2 = - 75$ Н;

$N_C = 3Q/4 + 3Y_B/2 = 525$ Н.

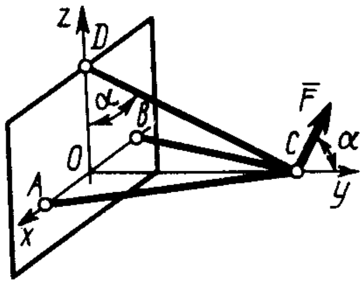
Из полученных результатов видно, что все реакции, кроме $\overline{Y}_A$, имеют направления, показанные на рисунке, реакция же $\overline{Y}_A$ фактически направлена вниз.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. На пресс в точке *O* действуют силы $F_1 = 5$ Н и $F_2 = 7$ Н, линии действия которых находятся в плоскости чертежа. Определите модуль силы давления пресса на материал, если заданы углы $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$ (Ответ: 9,28 Н).



К заданию 1.



К заданию 2.

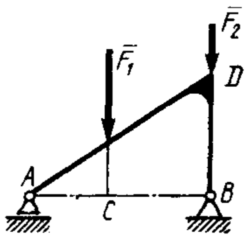
2. Три стержня *AC, BC*, и *DC* соединены шарнирно в точке *C*. Определить усилие в стержне *DC*, если заданы сила $F = 50$ Н и угол $\alpha = 60°$. Сила $\overline{F}$ находится в плоскости *Oyz* (Ответ: 86,6 Н).

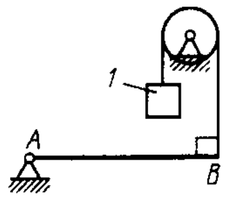
3. Напишите уравнения равновесия тела при произвольной плоской системе сил, действующих на него.

4. Какое максимальное число неизвестных сил можно определить, решая уравнения равновесия для плоской системы параллельных сил?

5. На раму *ADB* действуют вертикальные силы $F_1 = 10$ кН и $F_2 = 4$ кН. Определите реакцию опоры *B*, если расстояния $AC = 2$ м, $AB = 6$ м (Ответ: 6 кН).

6. Определите вес груза 1, необходимый для того, чтобы однородная балка *AB* весом 340 Н в положении равновесия была горизонтальна (Ответ: 170 Н).



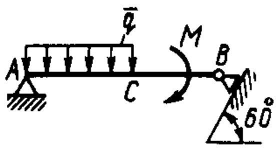


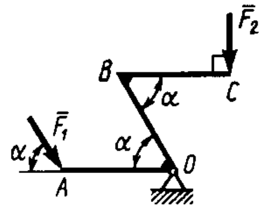
К заданию 5. К заданию 6.

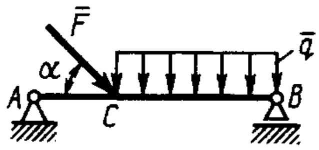
7. Определите момент М пары сил, при котором реакция опоры B равна 250 Н, если интенсивность распределенной нагрузки q = 150 Н/м, размеры $AC = CB = 2$ м (Ответ: 200 Н).

8. Определите силу F_2, при которой рычаг в указанном положении находится в равновесии, если угол α = 60°, F_1 = 50 кН, а длины AO = 3 м, $OB = BC$ = 4м (Ответ: 65 кН).

9. На балку AB действуют распределенная нагрузка интенсивностью q = 2 Н/м и сила F = 6 Н. Определите реакцию опоры В, если длина AC = 1/3 AB, угол α = 45° (Ответ: 4,08 Н).





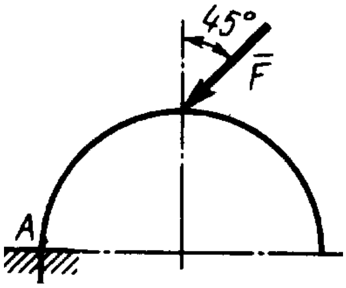


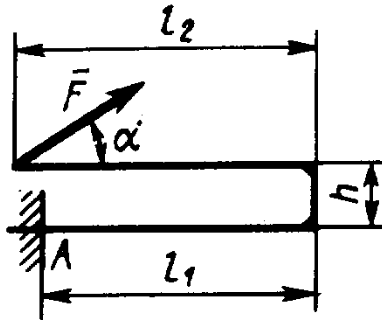
К заданию 7. К заданию 8. К заданию 9.

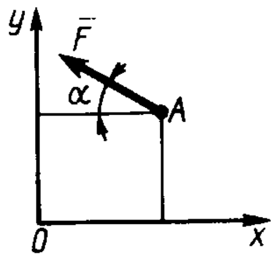
10. Сформулируйте теорему Вариньона о моменте равнодействующей заданной системы сил.

11. Арка, имеющая форму полуокружности, жестко заделана в точке А. Определите момент в заделке, если сила F = 100 Н (Ответ: 0 Н).

12. Определите в момент в заделке А, если сила F = 80 кН, угол α = 30°, расстояния l_1 = 1,8 м, l_2 = 2 м, h = 0,4 м (Ответ: 35,7 кНм).







К заданию 11. К заданию 12. К заданию 14.

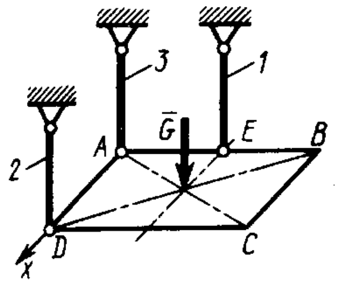
13. Определите момент силы относительно начала координат, если сила задана проекциями $F_x = F_y$ = 210 Н и известны координаты точки приложения силы $x = y$ = 0,1 м (Ответ: 0 кНм).

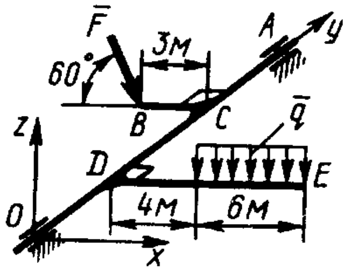
14. Сила F = 420 Н, приложенная к точке A лежит в плоскости Oxy. Определите момент силы относительно точки O, если координаты x_A = 0,2 м, y_A = 0,3 м и угол α = 30° (Ответ: 151 кНм).

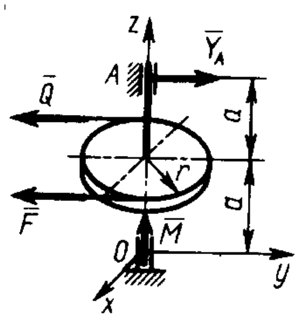
15. Напишите уравнения равновесия для пространственной системы произвольных сил.

16. Какое максимальное число неизвестных сил можно определить решая эти уравнения?

17. Горизонтальная однородная квадратная плита $ABCD$ весом G подвешена в точках A, D, E к трем вертикальным стержням 1, 2, 3. Определите вес плиты, если усилие в стержне 1 S_1 = 200 Н, AD = AE (Ответ: 200 Н).







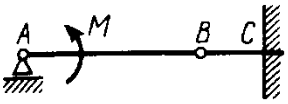
К заданию 17. К заданию 18. К заданию 19.

18. К валу OA под прямым углом прикреплены стержни BC и DE. К стержню DE приложена распределенная нагрузка q = 0,5 Н/м. Определите модуль силы F, уравновешивающей данную нагрузку, если $F \,||\, Oxz$ (Ответ 8,08 Н).

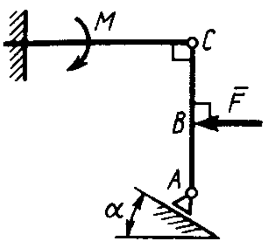
19. Сила $F = 2Q$ = 120 Н, приложенная к шкиву, уравновешивается парой сил с моментом M = 18 Нм. Составив уравнение моментов относительно оси Ox, определите реакцию Y_A подшипника A, если радиус шкива r = 0,3 м, a = 0,3 м и сила $F \,||\, Q \,||\, Oy$ (Ответ: 90 Н).

20. На балку AB действует пара сил с моментом M = 800 Нм. Определите момент в заделке C, если AB = 2 м и BC = 0,5 м (Ответ: 200Нм).

21. Определите реакцию опоры A, если сила F = 3 кН, угол α = 30°, размеры $AB = BC$ (Ответ: 3 кН).



К заданию 20.



К заданию 21.

2. Центр тяжести

Рассмотрим некоторые способы нахождения положения центров тяжести тел, которые применяют при решении задач.

Способ симметрии. Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии.

Из свойств симметрии следует, что центр тяжести однородного круглого кольца, или пластины, прямоугольного параллелепипеда, шара и других однородных тел, имеющих центр симметрии, лежит в геометрическом центре (центре симметрии) этих тел.

Способ разбиения. Если тело можно разбить на конечное число таких частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно, то координаты центра тяжести всего тела можно непосредственно вычислить по формулам, приведенным выше. При этом число слагаемых в каждой из сумм будет равно числу частей, на которые разбито тело.

Способ дополнения. Этот способ является частным случаем способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим вырезы, если центры тяжести тела без выреза и вырезанной части известны.

Определение положения центра тяжести некоторых однородных тел.

- для однородного твердого тела вес p_k любой его части пропорционален объему V_k этой части: $p_k = \gamma V_k$, а вес P всего тела пропорционален объему V этого тела, т. е. $P = \gamma V$,

где γ — вес единицы объема (объемный вес).

В результате получаем:

$$x_C = \frac{\sum V_k x_k}{V};\ y_C = \frac{\sum V_k y_k}{V};\ z_C = \frac{\sum V_k z_k}{V}.$$

Как видно, положение центра тяжести однородного тела зависит только от его геометрической формы. Точку C в этом случае называют ***центром тяжести объема V***.

- для тела, представляющего собой однородную плоскую и тонкую пластину

$$x_C = \frac{\sum S_k x_k}{S};\ y_C = \frac{\sum S_k y_k}{S},$$

где S — площадь всей пластины; S_k — площади ее частей.

Точку C называют ***центром тяжести площади S***.

- координаты центра тяжести линии

$$x_C = \frac{\sum l_k x_k}{L};\ y_C = \frac{\sum l_k y_k}{L};\ z_C = \frac{\sum l_k z_k}{L},$$

где L — длина всей линии; l_k — длины ее частей.

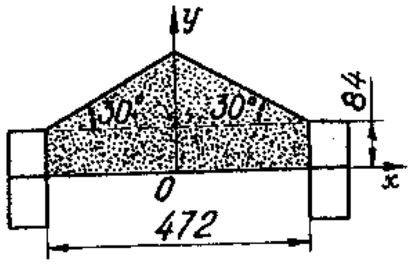
Точку C называют ***центром тяжести линии***.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.1. Определить координату центра тяжести прямолинейного однородного стержня AB, если заданы координаты точек A и B - $x_A = 10$ см, $x_B = 40$ см (Ответ: $x_C = 25$ см).

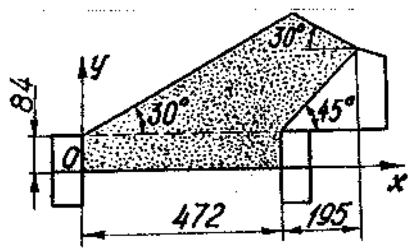
Задача 2.2. Определить координату центра тяжести однородной пластины, которая имеет вид прямоугольного треугольника АВД, если известны координаты вершин $x_A = x_B = 3$ см, $x_Д = 9$ см (Ответ: $x_C = 8$ см).

Задача 2.3. Определить положение центра тяжести поперечного сечения материала, перемещаемого скребковым конвейером; размеры указаны на рисунке.



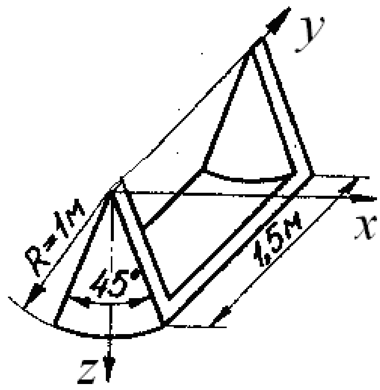
Ответ: $y_C = 81{,}15$ мм.

Задача 2.4. Решить предыдущую задачу для конвейера с дополнительным бортом; размеры указаны на рисунке.



Ответ $x_C = 341{,}6$ мм; $y_C = 151{,}8$ мм.

Задача 2.5. Найти координаты центра тяжести полуковша грейфера, если $R = 1$ м, $l = 1{,}5$ м, $\alpha = 45°$; толщиной стенок пренебречь.

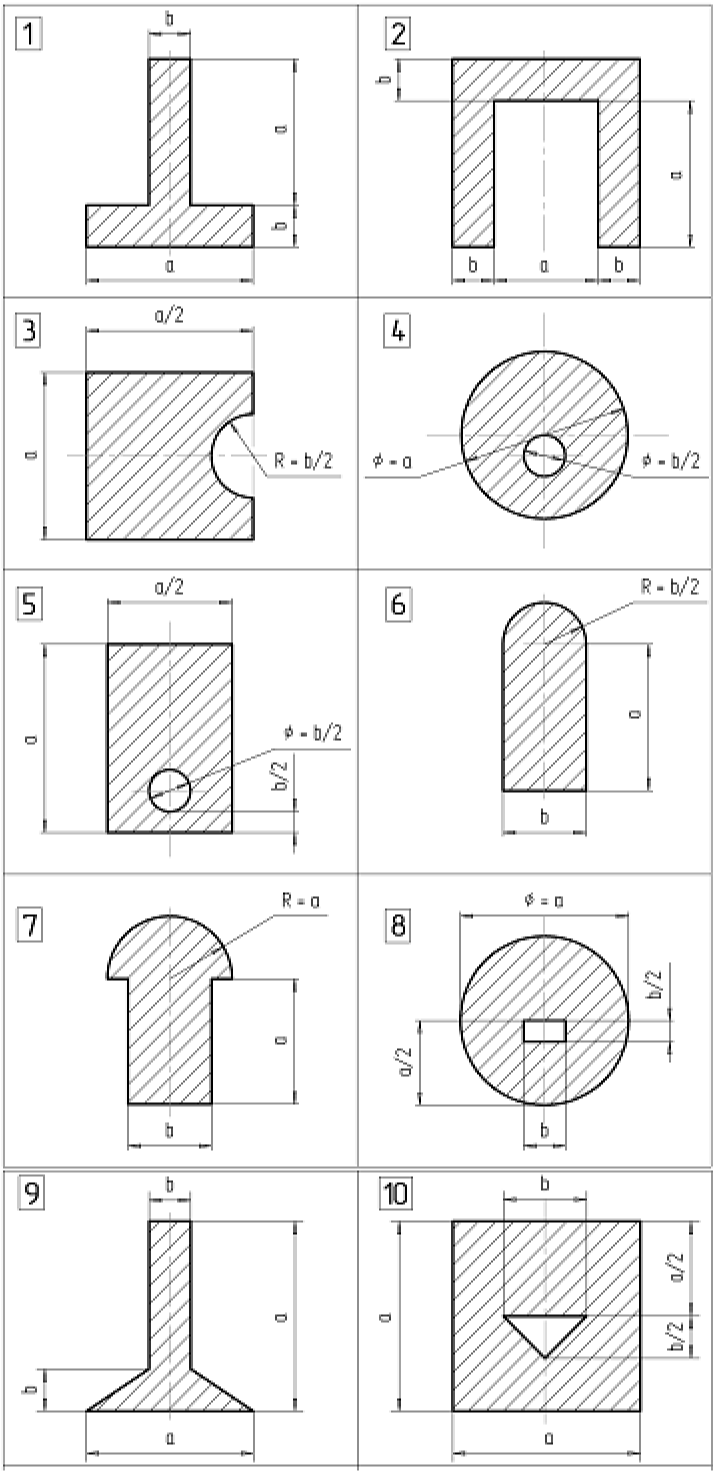


Ответ: $x_C = 0$; $y_C = 0{,}75$ м; $z_C = 0{,}845$ м.

Задача 2.6. Определить положение центра тяжести однородных пластин, приведенных на рисунке. Данные к расчетам приведены в таблице 3.

Таблица 3.

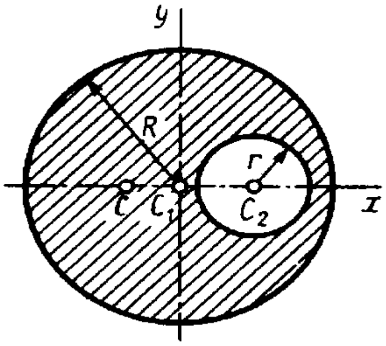
Данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a, мм	80	90	100	110	115	120	125	130	135	150
b, мм	40	50	60	40	50	60	70	80	70	50



К задаче 2.6.

Примеры решения задач

Задача 1. Определить положение центра тяжести круглой пластины радиуса R с вырезом радиуса r (рис.). Расстояние $C_1C_2 = a$.



К задаче 1.

Решение. Центр тяжести пластины лежит на линии C_1C_2, так как эта линия является осью симметрии. Проводим координатные оси. Для нахождения координаты x_C дополняем площадь пластины до полного круга (часть 1), а затем вычитаем из полученной площади площадь вырезанного круга (часть 2). При этом площадь части 2, как вычитаемая, должна браться со знаком минус. Тогда площади $S_1 = \pi R^2$, $S_2 = - \pi r^2$, $S = S_1 + S_2 = \pi(R^2 - r^2)$.

Координаты центров тяжести C_1 и C_2

$x_1 = 0$, $x_2 = a$;

$y_1 = y_2 = 0$

Подставляя найденные значения в формулы, определяющие координаты центра тяжести пластины, получаем:

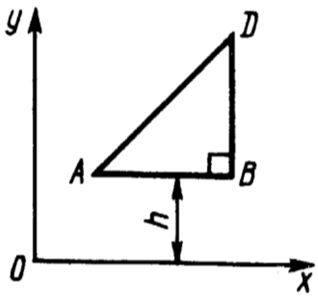
$$x_C = \frac{x_1S_1 + x_2S_2}{S} = -\frac{ar^2}{R^2 - r^2};$$

$y_C = 0$.

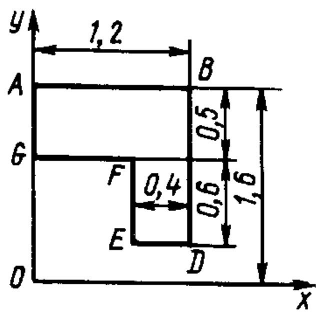
Найденный центр тяжести C, как видим из вычислений, лежит левее точки C_1.

Вопросы и задания для самоконтроля

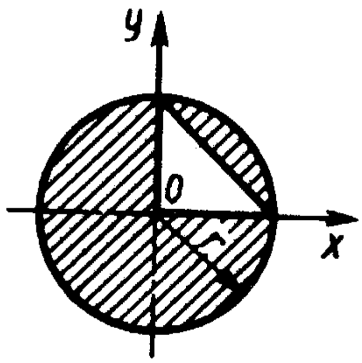
1. Перечислите способы определения координат центров тяжести тел.
2. Определите положение центра тяжести четверти круга и четверти окружности.



К заданию 3.



К заданию 4.



К заданию 5.

3. При каком расстоянии h от однородной пластины ABD до оси Ox координата центра тяжести пластины $y_C = 0{,}3$ м, если BD=0,3 м (Ответ: 0,2 м).
4. Определите координату y_C центра тяжести площади фигуры $ABDEFG$, стороны которой параллельны координатным осям. Размеры на рисунке заданы в м (Ответ: 1,19 м).
5. Определите координату x_C центра тяжести заштрихованной площади фигуры, если радиус r =2 м (Ответ: - 0,126 м).

3. Трение скольжения и качения

Сила трения скольжения препятствует скольжению тела по поверхности. Сила трения покоя принимает значение от нуля до максимального значения $F_{ПР}$ называемого предельной силой трения, т. е.

$$0 \le F_{ТР} \le F_{ПР}.$$

Приложенная к телу сила трения покоя направлена в сторону, противоположную той, куда действующие на тело силы стремятся его сдвинуть.

Предельная сила трения равна

$$F_{ПР} = f_0 N$$

Статический коэффициент трения f_0 — величина безразмерная, он определяется экспериментально и зависит от материала соприкасающихся тел, состояния поверхностей контакта, температуры, влажности и т. п.

Сила трения будет равна величине $F_{ПР}$ в состоянии предельного равновесия. При малейшем превышении этого значения силы тело начинает двигаться (скользить).

При скольжении тела по шероховатой поверхности к нему приложена сила трения скольжения. Направление этой силы противоположно направлению скорости тела, а модуль силы трения скольжения определяется произведением коэффициента трения на нормальное давление:

$$F_{ТР} = f\, N,$$

где f - коэффициент трения скольжения

При качении одного тела по поверхности другого возникает пара сил, препятствующая качению. Момент этой пары сил

$$M = \delta\, N,$$

где δ – коэффициент трения качения, имеющий размерность длины

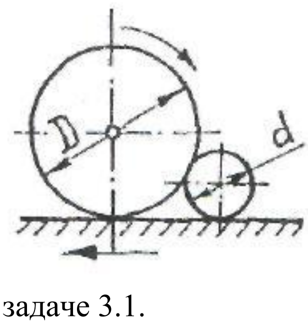
Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.1. Принцип действия измельчительного устройства, называемого бегунами, основан на том, что кусок материала, попадая под цилиндрический каток (бегун), захватывается силами трения и дробится. Определить наибольший диаметр захватываемого куска, пренебрегая его весом, если известны диаметр бегуна D и коэффициент трения f.

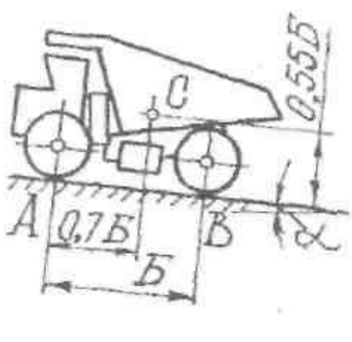
Ответ: $d = Df^2$.

Задача 3.2. Определить давление передних и задних колес карьерного самосвала на грунт и минимальный коэффициент сцепления между задними ведущими колесами и дорогой, необходимый для обеспечения равномерного движения самосвала без пробуксовки вверх по подъему $\alpha = 8°$. Вес самосвала $G = 460$ кН и приложен в точке C. Размеры указаны на рисунке. Трением качения пренебречь.

Ответ: $N_A = 101{,}4$ кН; $N_B = = 354{,}1$ кН; $f = 0{,}181$.



К задаче 3.1.



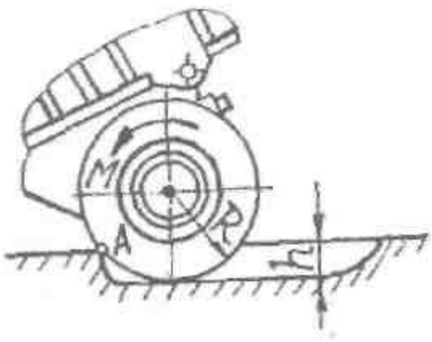
К задаче 3.2.

Задача 3.3. Определить максимальную глубину h выемки, которую могут преодолеть задние ведущие колеса самосвала без пробуксовки, а также момент M на колесах, считая, что контакт шины с грунтом осуществляется в точке *A*. Коэффициент сцепления колес с грунтом $f = 0{,}7$; радиус колеса $R = 765$ мм; давление на заднюю ось $G = 160$ кН и направлено вертикально.

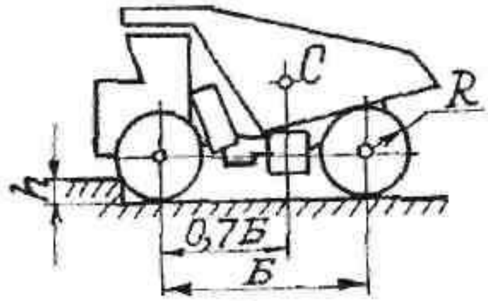
Ответ: $h = 138$ мм; $M = 70{,}2$ кНм.

Задача 3.4. Определить максимальную высоту h порога, которую могут преодолеть передние колеса самосвала без пробуксовки задних ведущих колес, если коэффициент сцепления ведущих колес с грунтом $f = 0{,}4$, колесная база $Б = 3550$ мм, радиус колеса $R = 765$ мм, вес самосвала приложен в точке *C*.

Ответ: $h = 300{,}7$ мм.



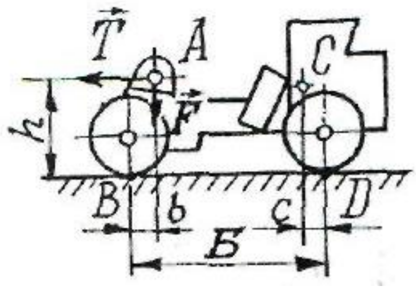
К задаче 3.3.



К задаче 3.4.

Задача 3.5. Карьерный самосвал весом $G = 167$ кН с прицепом, шар-нирно закрепленным в точке *A*, движется равномерно по горизонтальной дороге. Определить давление каждой пары колес на грунт и минимальное значение коэффициента сцепления f ведущих колес с дорогой, если силы в шарнире *A* равны: $F = 243$ кН; $T = 50$ кН и заданы размеры: $Б = 3{,}55$ м; $b = 0{,}35$ м; $c = 0{,}57$ м; $h = 1{,}65$ м. Вес самосвала приложен в точке *C*. Трением качения пренебречь.

Ответ: $N_A = 269{,}1$ кН; $N_B = 140{,}9$ кН; $f = 0{,}186$.

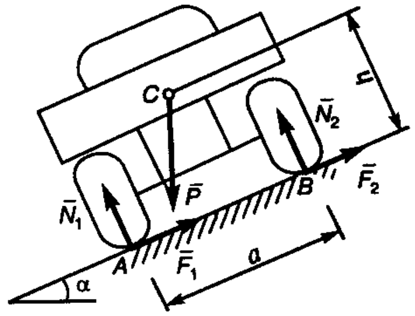


К задаче 3.5

Примеры решения задач

Задача 1. Автомобиль весом P стоит на наклонном участке дороги (рис.). Расстояние между центрами колес a, сила P приложена в точке **C**, высота которой над полотном дороги равна h; коэффициент трения скольжения колес о дорогу равен f.

При каком угле бокового наклона дороги α к плоскости горизонта может произойти опрокидывание автомобиля и когда может начаться боковое скольжение?



К задаче 1.

Решение. При равновесии автомобиля, стоящего на дороге, на него будут действовать сила тяжести $\overline{P}$, нормальные реакции дороги $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ и силы трения $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$.

При опрокидывании автомобиль будет поворачиваться вокруг точки A и силы N_2, F_2 на него не будут действовать. Опрокидывание произойдет, если при отрыве колеса B от полотна дороги момент относительно точки A опрокидывающих сил будет больше момента сил удерживающих, т. е.

$$P \sin\alpha \cdot h > P \cos \alpha\, a/2.$$

Отсюда следует, что опрокидывание будет, если

$$\mathrm{tg}\alpha > a/2h$$

Определим теперь значение угла α, при котором начнется боковое скольжение. Рассматривая действие системы сил на автомобиль и составив уравнение проекций на ось AB, получим условие скольжения (оно происходит, когда сдвигающая сила больше суммарной силы трения)

$$P \sin\alpha > (F_1 + F_2)_{\max}$$

Учитывая, что

$$(F_1 + F_2)_{\max} = f(N_1 + N_2) = f\, P \cos\alpha$$

получим условие скольжения

$$\mathrm{tg}\alpha > f.$$

Таким образом, анализируя полученные результаты, приходим к следующему:

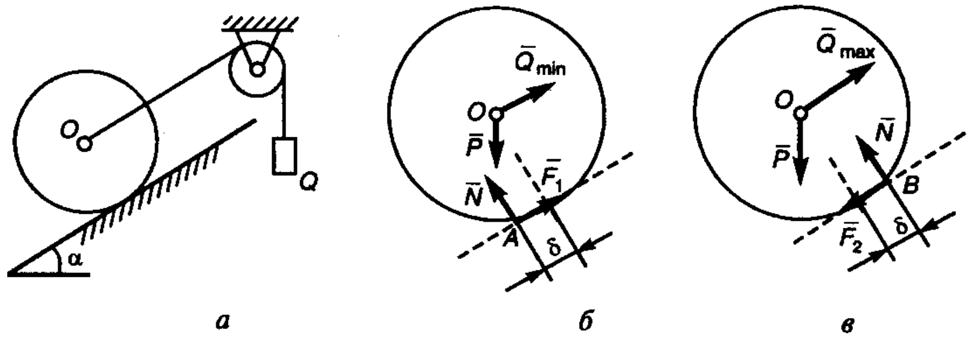
автомобиль скользит без опрокидывания при $f < \mathrm{tg}\alpha < a/2h$;

автомобиль опрокидывается без скольжения при $f > \mathrm{tg}\alpha > a/2h$;

автомобиль и опрокидывается, и скользит при $f < \mathrm{tg}\alpha > a/2h$;

автомобиль не опрокидывается и не скользит при $f > \mathrm{tg}\alpha < a/2h$.

Задача 2. Определить, при каких значениях угла α (рис.) цилиндр весом P и радиусом R, лежащий на наклонной плоскости, останется в покое, если коэффициент трения скольжения f_0, а коэффициент трения качения δ.



К задаче 2.

Решение. Рассмотрим равновесие катка. Составим условия равновесия в проекциях на оси x и y.

$$P \sin\alpha - F = 0;$$

$$N - P\cos\alpha = 0.$$

Из уравнений найдем, что

$$P\sin\alpha = f_0 P\cos\alpha;$$
$$N = P\cos\alpha.$$

В предельном положении равновесия, когда будет действовать предельная сила трения $F = F_{\text{ПР}} = f_0 \cdot N = f_0 \cdot P\cos\alpha$.

$$\mathrm{tg}\alpha = f_0.$$

Следовательно, скольжения не будет

при условии $\quad \mathrm{tg}\alpha \leq f_0$.

Составив уравнение моментов относительно точки A, получим

$$\delta N - P \cdot R\sin\alpha = 0.$$

Каток не будет поворачиваться (катиться), если $\delta N \geq \cdot P R \sin\alpha$. Учтя, что $N = P\cos\alpha$, получим условие отсутствия качения

$$\mathrm{tg}\alpha \leq \delta/R.$$

Таким образом, каток на наклонной плоскости будет в покое, если выполняются оба условия

$$\mathrm{tg}\alpha \leq f_0.$$
$$\mathrm{tg}\alpha \leq \delta/R.$$

Вопросы и задания для самоконтроля

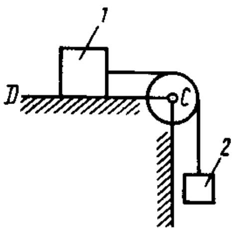
1. Как определяется предельная сила трения скольжения?

2. Что понимают под коэффициентом трения качения?

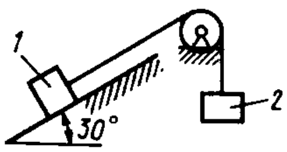
3. Определить наименьший коэффициент трения скольжения между грузом 1 весом 400 Н и плоскостью DC, при котором груз 1 останется в покое, если вес груза 2 равен 96 Н

4. Каким должен быть наибольший вес груза 2 для того чтобы груз 1 весом 100 Н оставался в покое на наклонной поверхности, если коэффициент трения скольжения $f = 0.3$?

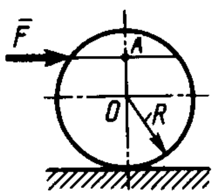
5. К однородному катку весом 2 кН приложена горизонтальная сила $\overline{F}$. Определить наибольший модуль силы $\overline{F}$, при котором каток не скользит и не катится, если коэффициент трения качения $\delta = 0{,}006$ м, коэффициент трения скольжения $f = 0{,}2$, радиус $R = 0{,}6$ м, размер $OA = 0{,}4$ м.



К заданию 3.



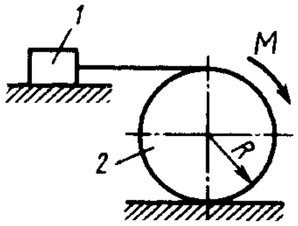
К заданию 4.



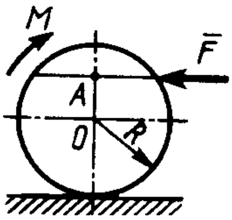
К заданию 5.

6. Однородный каток 2 весом 4 кН связан с телом 1 нерастяжимой нитью. Определите наибольший вес тела 1, при котором оно начинает скользить, если коэффициент трения скольжения $f = 0{,}2$, коэффициент трения качения $\delta = 0{,}005$ м, момент пары сил $M = 50$ Н·м. Радиус катка $R = 0{,}5$ м.

7. К однородному катку весом 4 кН приложены сила $F = 50$ Н и пара сил с моментом $M = 20$ Н·м. Определите наименьший радиус R катка, при котором он будет катиться влево, если коэффициент трения качения $\delta = 0{,}005$ м и OA = 0,6 R.



К заданию 6.



К заданию 7.

КИНЕМАТИКА

4. Кинематика точки

В кинематике точки определяются траектории движения точки, а также вычисляются ее скорости и ускорения.

Проекции скорости и ускорения точки на координатные оси (координатный способ задания движения) определяются по формулам

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt};$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

где x, y, z координаты точки, заданные как функции времени.

Модули скорости и ускорения определяются по формулам

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2};$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Если известен закон движения точки по заданной траектории (естественный способ задания движения), то используются формулы

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2},\ a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

где s – дуговая координата точки;

ρ - радиус кривизны траектории;

a_τ и a_n – тангенциальное и нормальное ускорения точки.

Ускорение точки

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.1. Даны уравнения движения точки $x = t^2$, $y = \sin \pi t$, $z = \cos \pi t$. Определить модуль скорости точки в момент времени t = 1 с.

Ответ: v = 3,72 м/с.

Задача 4.2. Проекция скорости точки $v_x = 2 \cos \pi t$. Определить координату x точки в момент времени t = 1 с, если при $t_o = 0$ координата $x_o = 0$.

Ответ: x = 0.

Задача 4.3. Скорость самосвала равномерно увеличивается в течение 12 с от нуля до 60 км/ч. Определить ускорение самосвала.

Ответ: a = 1,39 м/с^2.

Задача 4.4. Точка движется по прямой с ускорением a =0,5 м/с^2. Определить, за какое время будет пройдено расстояние 9 м, если при $t_o = 0$ скорость $v_o = 0$.

Ответ: t = 6 с.

Задача 4.5. Точка движется по прямой с постоянным ускорением a = 0,3 м/с^2. Определить начальную скорость, если через 6 с скорость точки стала равной 3 м/с.

Ответ: v_o =1,2 м/с.

Задача 4.6. Скорость автомобиля 90 км/ч. Определить путь торможения до остановки, если среднее замедление автомобиля 3 м/с^2.

Ответ: S = 104 м.

Задача 4.7. Даны проекции скорости на координатные оси $v_x = 3t$, $v_y = 2t^2$, $v_z = t^3$. Определить модуль ускорения в момент времени t = 1 с.

Ответ: a = 5,83 м/с^2.

Задача 4.8. Ускорение прямолинейного движения точки $a = t$. Определить скорость точки в момент времени t = 3 с, если при t_o = 0 скорость v_o =2 м/с.

Ответ: v =6,5 м/с.

Задача 4.9. При торможении самосвала замедление машины в течение 0,8 с возрастает пропорционально времени от нуля до 3,2 м/с^2 и затем остается постоянной. Скорость самосвала в начале торможения 18 км/ч. Определить время торможения и тормозной путь.

Ответ: t = 1,96 с; S = 5,82 м.

Задача 4.10. Точка движется по траектории согласно уравнению $s = 0{,}5t^2 + 4t$. Определить, в какой момент времени скорость точки достигнет 10 м/с.

Ответ: t = 6 с.

Задача 4.11. Точка движется по окружности согласно уравнению $s = t^3 + 2t^2 + 3t$. Определить криволинейную координату точки в момент времени, когда ее касательное ускорение a_τ = 16 м/с^2.

Ответ: s = 22 м.

Задача 4.12. Касательное ускорение точки $a_\tau = 0{,}2\ t$ м/с^2. Определить момент времени t, когда скорость точки достигнет 10 м/с, если при t_o = 0 скорость v_o =2 м/с.

Ответ: t = 8,94 с.

Задача 4.13. Проекции скорости точки во время движения определяются выражениями $v_x = 0{,}2t^2$, $v_y = 3t$ м/с. Определить касательное ускорение в момент времени t = 2,5с.

Ответ: a_τ = 0,385 м/с^2.

Задача 4.14. Определить радиус закругления трассы бобслея, если при скорости спуска 120 км/ч нормальное ускорение a_n = 2g.

Ответ: ρ = 56,6 м.

Задача 4.15. Дано уравнение движения точки по траектории $s = 5t$. Определить радиус кривизны траектории, когда нормальное ускорение точки a_n = 3 м/с^2.

Ответ: ρ =8,33 м.

Задача 4 16. Точка движется по криволинейной траектории с касательным ускорением a_τ = 1,4 м/с^2. Определить нормальное ускорение точки в момент времени, когда ее полное ускорение a = 2,6 м/с^2.

Ответ: a_n = 2,19 м/с^2.

Задача 4.17. Ускорение точки a = 1 м/с^2. Векторы ускорения и скорости образуют угол 45^o. Определить скорость в км/ч, если радиус кривизны траектории ρ =300 м.

Ответ: v = 52,4 км/ч.

Задача 4.18. Точка движется по окружности радиуса R = 2 м. Нормальное ускорение точки $a_n = 2t$ м/с^2. Определить угол между векторами скорости и полного ускорения точки в момент времени t_1 = 1 с.

Ответ: α = 45^o.

Задача 4.19. Движение точки задано уравнениями $x = f_1(t)$ и $y = f_2(t)$ (x, y - в метрах, t - в секундах). Найти траекторию движения точки. Данные приведены в таблице 4.

Задача 4.20. Используя данные задачи 4.19 вычислить скорость и ускорение точки в момент времени t_1 = 1 с. Показать векторы скорости и ускорения в этот момент времени.

Задача 4.21. Используя данные задачи 4.19 вычислить радиус кривизны траектории в момент времени t_1 = 1 с.

Таблица 4.

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x = f_1(t)$	$2t + 1$	$t^2 + 3$	$2t$	$-3t^2$	$2t$	$-2t^2$	$2t - 3$	t^2	$2t$	$5t^2$
$y = f_2(t)$	$-4t^2$	$2t$	$4t^2 + 1$	$t + 4$	$4t^2$	$4 - 2t$	$-t^2$	$5 + 2t$	$3t^2$	$2t-1$

Примеры решения задач

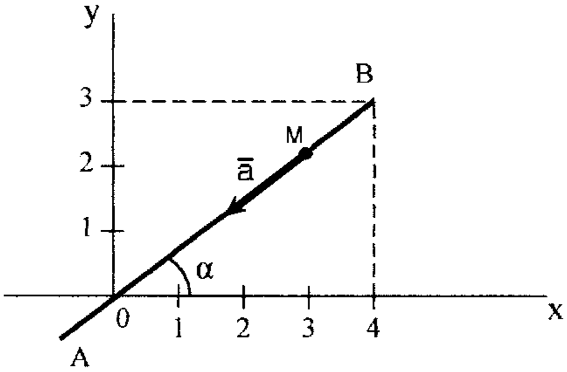
Задача 1. Движение точки задано уравнениями (x, y - в метрах, t - в секундах): $x = 8t - 4t^2$, $y = 6t - 3t^2$.

Определить траекторию, скорость и ускорение точки.

Решение. Для определения траектории исключаем из уравнений движения время t. Умножая обе части первого уравнения на 3, а обе части второго — на 4 и вычитая из первого равенства второе, получим:

$3x - 4y = 0$ или $y = 3x/4$.

Следовательно, траектория - прямая линия, наклоненная к оси Оx под углом α, где $\mathrm{tg}\alpha = 3/4$ (рис.).



К задаче 1.

Определяем скорость точки.

$$v_x = \dot{x} = 8(1 - t);$$

$$v_y = \dot{y} = 6(1 - t);$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 10\,(1 - t).$$

Теперь находим ускорение точки.

$$a_x = \ddot{x} = -8;$$

$$a_y = \ddot{y} = -6;$$

$$a = 10 \text{ м/с}^2.$$

Направлены векторы $\overline{v}$ и $\overline{a}$ вдоль траектории, т. е. вдоль прямой AB. Проекции ускорения на координатные оси все время отрицательны, следовательно, ускорение имеет постоянное направление от B к A. Проекции скорости при $0 < t < 1$ положительны, следовательно, в течение этого промежутка времени скорость точки направлена от O к B. При этом в момент времени $t = 0$, $v = 10$ м/с; при $t = 1$ с, $v = 0$. В последующие моменты времени ($t > 1$с) обе проекции скорости отрицательны и, следовательно, скорость направлена от B к A, т. е. так же, как и ускорение.

Итак, движение точки начинается из точки O с начальной скоростью v_0 = 10 м/с и происходит вдоль прямой AB, наклоненной к оси Ox под углом α, для которого tg α = 3/4. На участке OB точка движется замедленно (модуль ее скорости убывает) и через одну секунду приходит в положение B, где скорость ее обращается в нуль. Отсюда начинается ускоренное движение в обратную сторону. В момент t = 2с точка вновь оказывается в начале координат и дальше продолжает свое движение вдоль OA. Ускорение точки остается постоянным и равно 10 м/с^2.

Задача 2. Даны уравнения движения точки в плоскости xy:

$$x=-2\cos\cdot\left(\frac{\pi}{4}t\right)+3;$$

$$y=3\sin\cdot\left(\frac{\pi}{4}t\right)-1;$$

(x, y - в сантиметрах, t - в секундах).

Определить уравнение траектории точки; найти скорость и ускорение точки для момента времени t = 1с, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории. Показать векторы скорости и ускорения на чертеже.

Решение. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций, возводим обе части уравнений в квадрат и складываем.

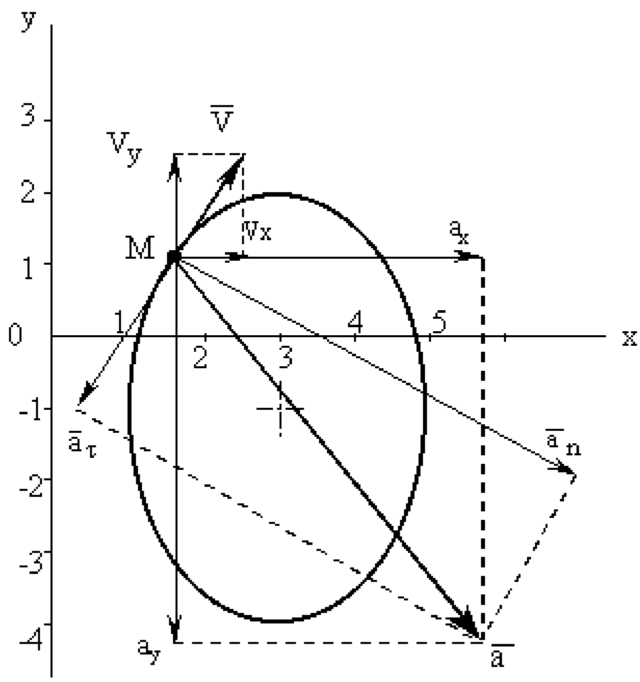
$$\cos\cdot\left(\frac{\pi}{4}t\right)=\frac{3-x}{2};\ \ \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)=\frac{y+1}{3}.$$

Получим:

$$\frac{(3-x)^2}{2^2}+\frac{(y+1)^2}{3^2}=1.$$

Это уравнение эллипса (рис.). Найдем положение точки M для момента времени t = 1с, определив ее координаты:

$x_{t=1c}$ = - 1,59 см, $y_{t=1c}$ = 1,12 см.



К задаче 2.

Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}\sin\cdot\left(\frac{\pi}{4}t\right);$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{3\pi}{4}\cos\cdot\left(\frac{\pi}{4}t\right);$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

В заданный момент времени, т.е. при t = 1с

v_x = 1,11см/с, v_y = 1,67см/с, v = 2,0см/с.

Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right);$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{3\pi^2}{16}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right);$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

$$a_\tau = \frac{a_x v_x + a_y v_y}{v};$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}.$$

Зная нормальное ускорение, найдем радиус кривизны траектории

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}.$$

С учетом времени t = 1с, получим

a_x = 0,87 см/с^2; a_y = -1,30 см/с^2; a = 1,57 см/с^2; a_τ = -0,6 см/с^2;

a_n = 1,67 см/с^2; ρ = 2,38 см.

Покажем векторы скоростей и ускорений для точки М на траектории в момент времени t = 1с (см.рисунок).

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Как задается движение точки?

2. Чем определяется положение точки при векторном (координатном, естественном) способе задания движения?

3. В чем отличия понятий «криволинейная координата» и «пройденный путь»?

4. Какие величины входят в уравнения движения точки?

5. Как определить скорости и ускорения точки при различных способах задания ее движения?

6. Дано уравнение движения точки $\bar{r} = t^2\bar{i} + 2t\bar{j} + 3\bar{k}$. Определите модуль скорости точки в момент времени t = 2 с (Ответ: v = 4,47 м/с).

7. Скорость точки $\bar{v} = 0{,}9t\bar{i} + t^2\bar{j}$. Определите модуль ускорения точки в момент времени t = 1,5 с (Ответ: a = 3,13 м/с^2).

8. Даны проекции скорости на координатные оси v_x = 3 м/с, v_y = 2 t^2. Определите модуль ускорения в момент времени t = 1 с (Ответ: a = 4 м/с^2).

9. Точка движется по окружности. Определите радиус окружности, если в момент времени, когда скорость v = 10 м/с, вектор ускорения, равный по модулю 1,2 м/с^2, и вектор скорости образуют угол 30° (Ответ: R = 167 м).

10. Задано уравнение движения точки по криволинейной траектории:
$s = 0{,}2\, t^2 + 0{,}3\, t$. Определите полное ускорение точки в момент времени t = 3с, если в этот момент радиус кривизны траектории. p = 1,5м (Ответ: a = 1,55 м/с^2).

5. Поступательное и вращательное движение тела

При поступательном движении тела все его точки имеют одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела являются его угловая скорость ω и угловое ускорение ε.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \ \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Скорость и ускорение точек тела определяются по формулам

$$v = h\omega;$$

$$a_\tau = h\varepsilon; \ a_n = h\omega^2;$$

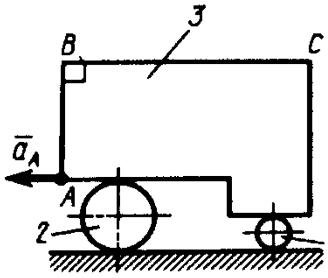
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Вектор скорости направлен всегда по касательной к траектории движения точки. $\bar{a}_\tau$ направлен по касательной к траектории (в сторону движения при ускоренном вращении тела и в обратную сторону при замедленном), $\bar{a}_n$ всегда направлен по радиусу кривизны траектории к оси вращения.

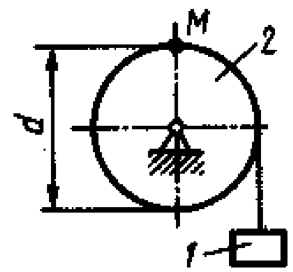
Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.1. Тело 3, установленное на двух цилиндрических катках 1 и 2, совершает поступательное движение. Чему равно ускорение точки C, если ускорение точки A равно 2 м/с^2, причем $BC = 2AB$ = 1 м.

Ответ: a_C = 2 м/с^2.



К задаче 5.1.



К задаче 5.2.

Задача 5.2. Груз 1 поднимается с помощью лебедки, барабан 2 которой вращается согласно закону $\varphi = 5 + 2t^3$. Определить скорость точки M барабана в момент времени t = 1 с, если диаметр d = 0,6 м.

Ответ: v_M = 1,8 м/с.

Задача 5.3. Тело вращается равнопеременно с угловым ускорением ε = = 5 с$^{-2}$. Определить скорость точки на расстоянии R = 0,2 м от оси вращения в момент времени t = 2с, если при t_0 = 0 угловая скорость ω_0 = 0.

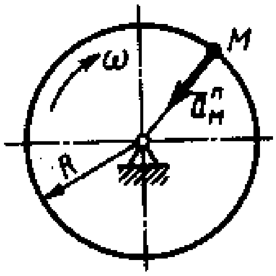
Ответ: v = 2 м/с.

Задача 5.4. Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону $\varphi = t^2$. Определить скорость точки тела на расстоянии R = 0,5 м от оси вращения в момент времени, когда угол поворота φ = 25 рад.

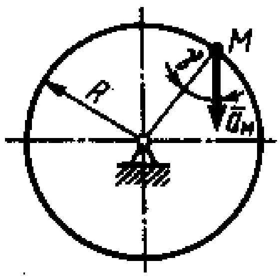
Ответ: v = 5 м/с.

Задача 5.5. Нормальное ускорение точки M диска, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно 6,4 м/с^2. Определить угловую скорость ω этого диска, если его радиус R = 0,4 м

Ответ: ω = 4 с$^{-1}$.



К задаче 5.5



К задаче 5.6.

Задача 5.6. Ускорение точки M диска, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно 8 м/с^2. Определить угловое ускорение этого диска, если его радиус R = 0,4 м, а угол γ = 30^o.

Ответ: ε = 10 с$^{-2}$.

Задача 5.7. Скорость точки тела на расстоянии R = 0,2 м от оси вращения изменяется по закону $v = 4\,t^2$, Определить угловое ускорение данного тела в момент времени t = 2 с.

Ответ: ε = 80 с$^{-2}$.

Задача 5.8. При равномерном вращении маховик делает 4 оборота в секунду. Определить за сколько секунд маховик повернется на угол φ = 24 π.

Ответ: t = 3 с .

Задача 5.9. Ротор электродвигателя, начав вращаться равноускоренно, сделал за первые 5 с 100 оборотов. Определить угловое ускорение ротора.

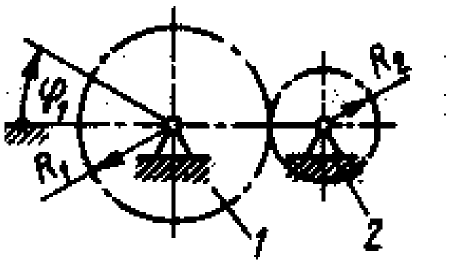
Ответ: ε = 50, 3 с$^{-2}$.

Задача 5.10. Тело вращается согласно закону φ = 1 + 4 t. Определить ускорение точки тела на расстоянии R = 0,2 м от оси вращения.

Ответ: а = 3,2 м/с2.

Задача 5.11. Колесо 1 вращается согласно закону φ = 20 t. Определить число оборотов, совершенных колесом 2 за время t = 3,14 с, если радиусы R_1 = 0,8 м R_2 = 0,5 м.

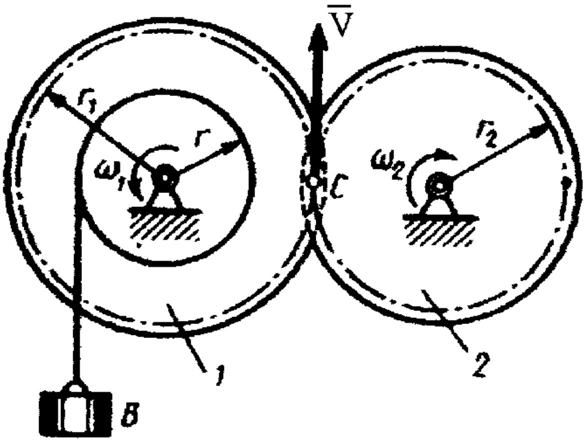
Ответ: n = 16 оборотов



К задаче 5.11

Примеры решения задач

Задача 1. Груз B приводит во вращение вал радиусом r и сидящую на одной оси с валом шестерню 1 радиусом r_1. Движение груза начинается из состояния покоя и происходит с постоянным ускорением a. Определить, по какому закону будет при этом вращаться находящаяся в зацеплении с шестерней 1 шестерня 2 радиусом r_2.



К задаче 1.

Решение. Так как груз B начинает двигаться без начальной скорости, то его скорость в любой момент времени t равна $v_B = at$. Эту скорость будут иметь и точки обода вала. Но, с другой стороны, скорости этих точек равны $\omega_1 r$, где ω_1 — общая для вала и шестерни 1 угловая скорость.

Следовательно,

$$\omega_1 r = at, \; \omega_1 = at / r.$$

Теперь найдем ω_2. Так как скорость точки сцепления C должна быть одной и той же для обеих шестерен, то

$$v_C = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2,$$

откуда

$$\omega_2 = r_1 \omega_1 / r_2 = r_1 a\, t / r_2 r.$$

Итак, угловая скорость шестерни 2 растет пропорционально времени. Учитывая, что

$$\omega_2 = d\varphi_2 / dt,$$

где φ_2 — угол поворота шестерни 2,

получим

$$d\varphi_2 = r_1 a\, t / r_2 r\, dt.$$

Отсюда, беря от обеих частей интегралы и считая, что при $t = 0$ угол $\varphi_2 = 0$, найдем окончательно закон равноускоренного вращения шестерни 2 в виде

$$\varphi_2 = (r_1 a / 2\, r_2 r)\, t^2.$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Какое движение тела называется поступательным?
2. Напишите уравнение вращательного движения твердого тела.
3. Дайте определения угловой скорости и углового ускорения тела при его вращении относительно неподвижной оси.
4. Как определить скорости и ускорения точек вращающегося тела?
5. Угловая скорость тела изменяется согласно закону $\omega = 2 - 8t^2$. Определите время t остановки тела (Ответ: $t = 0{,}5$ с) .
6. Угловое ускорение тела изменяется согласно закону $\varepsilon = 3t^2$. Определите угловую скорость тела в момент времени $t = 2$ с, если при $t_0 = 0$ угловая скорость $\omega_0 = 2$ с$^{-1}$ (Ответ: $\omega = 10$ с$^{-1}$).
7. Маховик вращается с постоянной частотой вращения, равной 90 об/мин. Определите ускорение точки маховика на расстоянии 0,043 м от оси вращения (Ответ: $a = 3{,}82$ м/с^2).

8. Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону $\varphi = 2t^2$. Определите нормальное ускорение точки тела на расстоянии $r = 0{,}2$ м от оси вращения в момент времени $t = 2$ с (Ответ: $a_n = 3{,}82$ м/с^2).

9. Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону $\varphi = 2t^3$. В момент времени $t = 2$ с определите касательное ускорение точки тела на расстоянии от оси вращения $r = 0{,}2$ м (Ответ: $a_\tau = 4{,}8$ м/с^2).

6. Сложное движение точки

Теорема о сложении скоростей: при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

$$\bar{v}_{\text{аб}} = \bar{v}_{\text{от}} + \bar{v}_{\text{пер}}\,.$$

Если угол между векторами $\bar{v}_{\text{от}}$ и $\bar{v}_{\text{пер}}$ равен α, то по модулю

$$v_{\text{аб}} = \sqrt{v_{\text{от}}^2 + v_{\text{пер}}^2 + 2v_{\text{от}}v_{\text{пер}}\cos\alpha}\,.$$

Теорема о сложении ускорений: при сложном движении ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и кориолисова.

$$\bar{a}_{\text{аб}} = \bar{a}_{\text{от}} + \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{кор}}$$

Кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению переносной угловой скорости тела на относительную скорость точки.

$$\bar{a}_{\text{кор}} = 2\,(\bar{\omega} \times \bar{v}_{\text{от}}).$$

Модуль кориолисова ускорения, если угол между векторами $\bar{\omega}$ и $\bar{v}_{\text{от}}$ обозначить α, будет равен

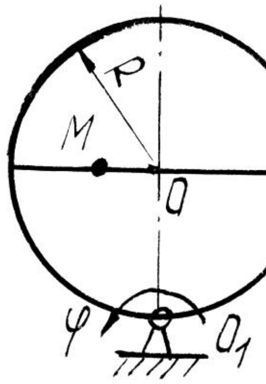
$$a_{\text{кор}} = 2|\,\omega\,|\,|v_{\text{от}}\,|\,\sin\alpha.$$

Задачи для самостоятельного решения

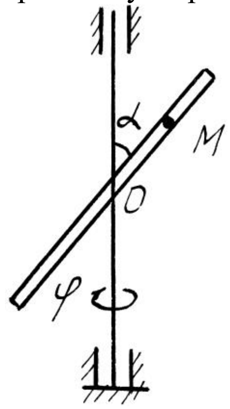
Задача 6.1. Круглая пластина радиуса $R = 0{,}2$ м вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости пластины и проходящей через точку O_1, по закону $\varphi = t^2$ рад. Точка M движется по закону $OM = S_r = 0{,}2\,t^3$ м. Определить абсолютное ускорение точки M при $t = 1$ с.

Задача 6.2. Стержень вращается вокруг неподвижной вертикальной оси по закону, $\varphi = t^2$ рад. Точка M движется по закону $OM = S_r = 0{,}2\,t^3$ м. Определить абсолютное ускорение точки M при $t = 1$ с, если $\alpha = 30^\circ$.

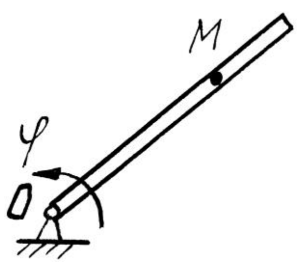
Задача 6.3. Стержень вращается вокруг оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через точку O, по закону $\varphi = 2t^2$ рад. Точка M движется вдоль стержня по закону, $OM = S_r = 0{,}4\,t^3$ м. Определить абсолютную скорость и ускорение Кориолиса точки M при $t = 1$ с.



К задаче 6.1.



К задаче 6.2.

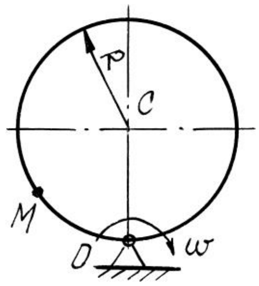


К задаче 6.3.

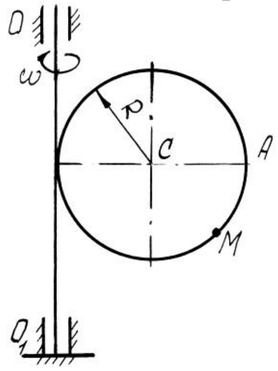
Задача 6.4. Диск радиуса R = 0,5 м вращается вокруг неподвижной оси, перпендикулярной диску и проходящей через точку O, с угловой скоростью ω = 2 с$^{-1}$. По ободу диска движется точка M по закону $OM = S_r = 0{,}5\ \pi R t^2$ м. Определить абсолютное ускорение точки M в момент времени t = 1 с.

Задача 6.5. Диск радиуса R = 0,5 м вращается вокруг неподвижной оси OO_1 с угловой скоростью $\omega = 2\ t$ с$^{-1}$. По ободу диска движется точка M по закону АМ = $S_r = \pi t$ м. Определить абсолютное ускорение точки M в момент времени t = 1 с.

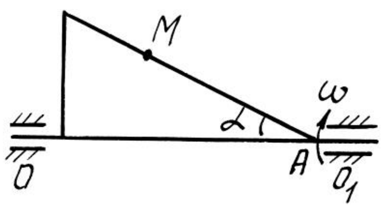
Задача 6.6. Прямоугольный треугольник вращается' вокруг, оси OO_1 с постоянной угловой скоростью ω = 2 с$^{-1}$. По стороне треугольника движется точка M по закону АМ = S_r = 0,4 t м. Определить ускорение точки M в момент времени t = 1 с, если $\alpha = 30^o$.



К задаче 6.4



К задаче 6.5

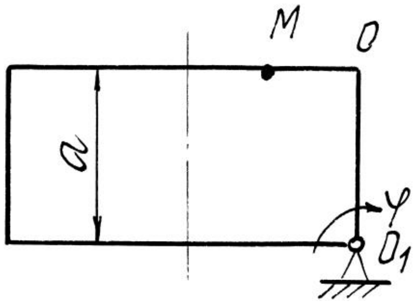


К задаче 6.6

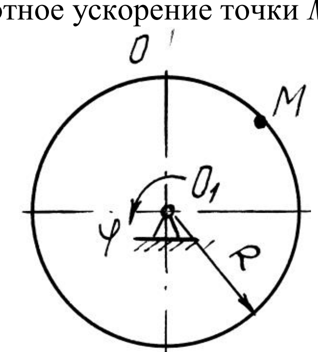
Задача 6.7. Прямоугольная пластина вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости пластины и проходящей через точку O_1, по закону $\varphi = 2t^2$ рад. Точка M движется по закону $OM = S_r = 0{,}6\ t^2$ м. Определить абсолютное ускорение точки M при t = 1 с, если a = 0,6 м.

Задача 6.8. Диск радиуса R = 0,5 м вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через центр O_1, по закону $\varphi = 2t^2$рад. Точка. M движется по закону $OM = S_r = \pi t^2$ м. Определить абсолютную скорость и ускорение Кориолиса точки M при t = 1 с.

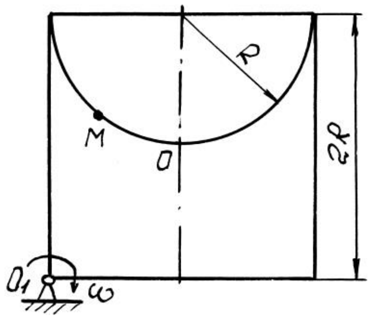
Задача 6.9. Пластина вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости пластины и проходящей через точку O_1, с угловой скоростью $\omega = t^2$ с$^{-1}$. Точка M движется по закону $OM = S_r = 0{,}5\pi\ t$ м. Определить абсолютное ускорение точки M при t = 1 с, если R = 1м.



К задаче 6.7



К задаче 6.8

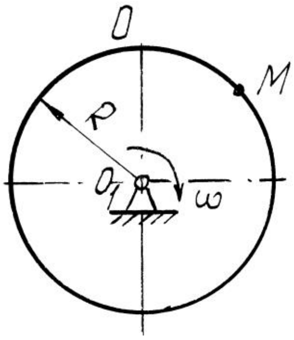


К задаче 6.9

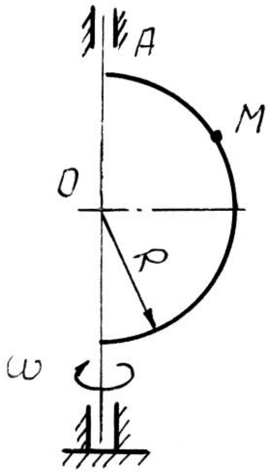
Задача 6.10. Диск вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр O_1, с угловой скоростью $\omega = t^3$ с$^{-1}$. По ободу диска движется точка M по закону $OM = S_r = 2\pi t^3$ м. Определить абсолютное ускорение точки M в момент времени t = 1 с, если радиус диска R = 0,2 м.

Задача 6.11. Полудиск радиуса R = 2м вращается вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью ω = 2с$^{-1}$. По его ободу движется точка M по закону $OM = S_r = \pi R t$ м. Определить абсолютное ускорение точки M в момент времени t = 1/3 с.

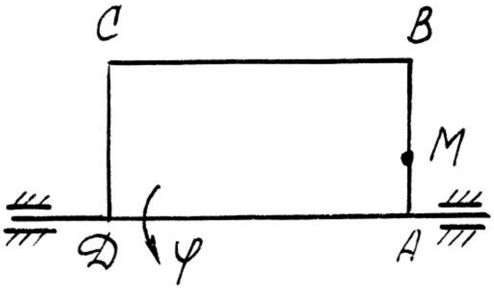
Задача 6.12. Прямоугольная пластина вращается вокруг стороны *АД* по закону $\varphi = 3t^3$ рад. По стороне *АВ* движется точка по закону $AM = S_r = 3t$ м. Определить абсолютное ускорение точки *M* в момент времени $t = 1$ с.



К задаче 6.10



К задаче 6.11

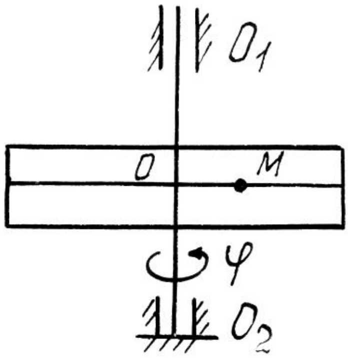


К задаче 6.12

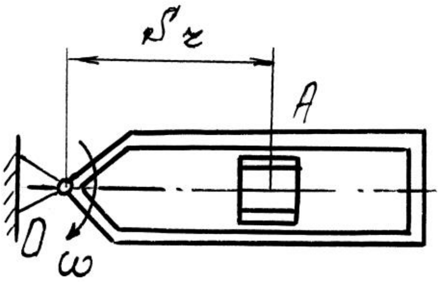
Задача 6.13. Пластина вращается вокруг вертикальной оси O_1O_2 по закону $\varphi = 2t^2$ рад. Точка *M* движется по закону $OM = S_r = 0{,}2\,t^2$ м. Определить абсолютное ускорение точки *M* при $t = 1$ с.

Задача 6.14. Кулиса вращается с постоянной угловой скоростью ω = 2с$^{-1}$ вокруг оси, перпендикулярной к плоскости кулисы и проходящей через точку *O*. Ползун *A* движется в направляющих кулисы по закону $OM = S_r = t^2$ м. Определить абсолютное ускорение ползуна при $t = 1$ с.

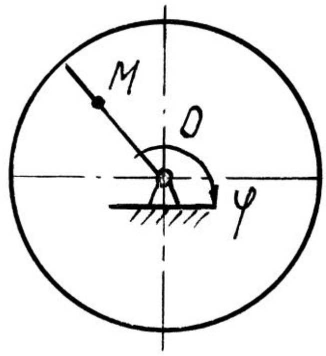
Задача 6.15. Диск $R = 2$м вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через центр *O*, по закону $\varphi = 2t^2$ рад. Вдоль радиуса движется точка *M* по закону $OM = S_r = 4\pi\,t^2$ м. Определить абсолютную скорость и ускорение Кориолиса точки *M* при $t = 1$ с.



К задаче 6.13



К задаче 6.14

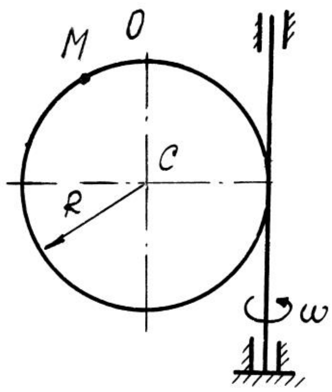


К задаче 6.15

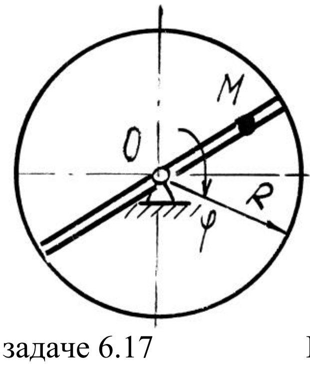
Задача 6.16. Круглая пластина радиуса $R = 0{,}5$ м вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega = 2\,t$ с$^{-1}$.Точка *M* движется по закону $OM = S_r = 0{,}2\pi\,t^2$ м. Определить абсолютное ускорение точки *M* при $t = 1$ с.

Задача 6.17. Круглая пластина радиуса $R = 1$м вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости пластины и проходящей через центр *O*, по закону $\varphi = 3t^2$ рад. Точка *M* движется по закону $OM = S_r = 0{,}4\,t^3$ м. Определить абсолютное ускорение точки *M* при $t = 1$ с.

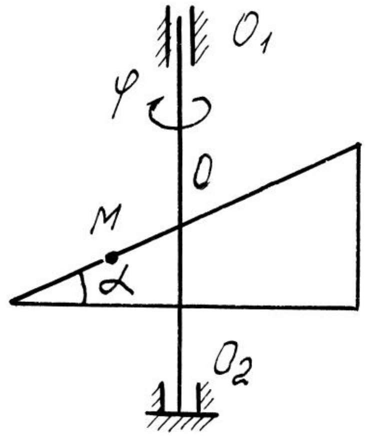
Задача 6.18. Пластина вращается вокруг вертикальной оси O_1O_2 по закону $\varphi = 2t$ рад. Точка *M* движется по закону $OM = S_r = 0{,}1\,t^3$ м. Определить абсолютное ускорение точки *M* при $t = 1$ с, если α = 60°.



К задаче 6.16



К задаче 6.17

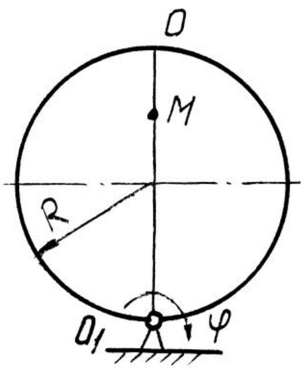


К задаче 6.18

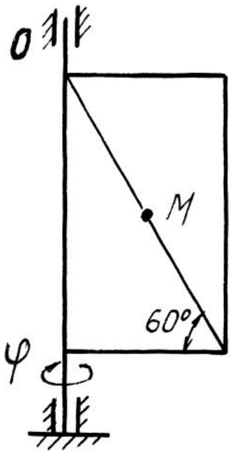
Задача 6.19. Диск вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через точку O_1, по закону $\varphi = 2t^2$ рад. По диаметру диска движется точка M по закону $OM = S_r = 0{,}4\ t^2$ м. Определить абсолютное ускорение точки M при t = 1 с, если радиус диска R = 1м.

Задача 6.20. Пластина вращается вокруг вертикальной оси по закону $\varphi = 3t^2$ рад. Точка M движется по закону $OM = S_r = 0{,}8\ t^2$м. Определить абсолютную скорость и ускорение Кориолиса точки M при t = 1 с.

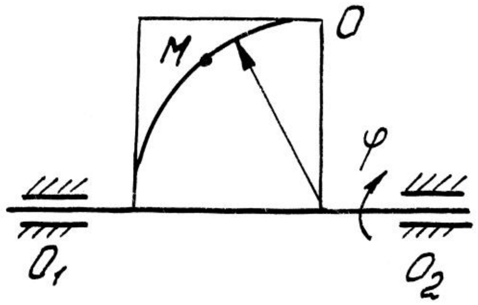
Задача 6.21. Пластина вращается вокруг горизонтальной оси O_1O_2 по закону $\varphi = 2t$ рад. Точка M движется по закону $OM = S_r = 0{,}25\ \pi t^2$ м. Определить абсолютное ускорение точки M при t = 1 с, если R = 1 м.



К задаче 6.19



К задаче 6.20

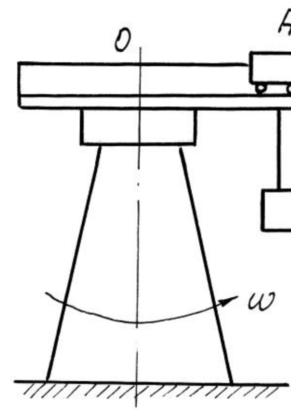


К задаче 6.21

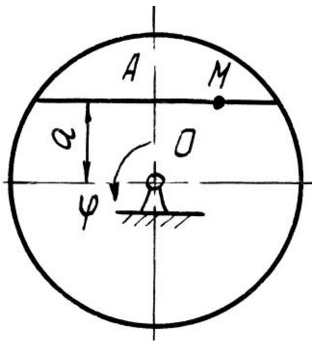
Задача 6.22. Башенный кран вращается равномерно с угловой скоростью $\omega = 2\text{с}^{-1}$. Крановая тележка A перемещается по стреле по закону $OA = S_r = 2\ t^2$ м. Определить абсолютное ускорение тележки в момент времени t = 1 с.

Задача 6.23. Диск вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через центр O, по закону $\varphi = 2t^2$ рад. Точка M движется по закону $AM = S_r = 0{,}4\ t^2$ м. Определить абсолютное ускорение точки M в момент t = 1 с, если a = 0,3 м.

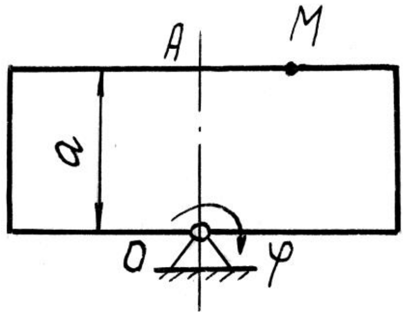
Задача 6.24. Прямоугольная пластина вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости пластины и проходящей через точку O, по закону $\varphi = 4t$ рад. Точка M движется по закону $OM = S_r = 4\ t^2$ м. Определить абсолютное ускорение точки M, при t = 1 с, если a = 3 м.



К задаче 6.22



К задаче 6.23

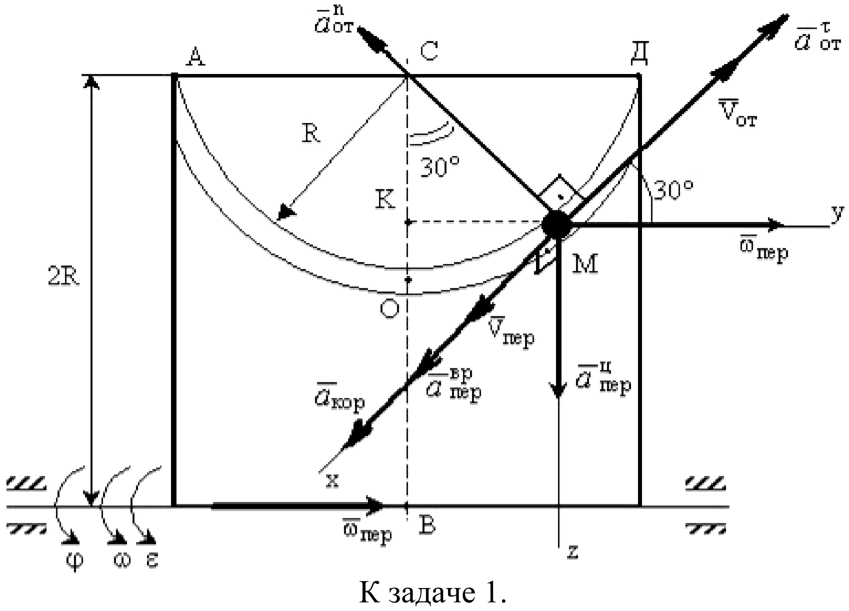


К задаче 6.24

Примеры решения задач

Задача 1. Пластина вращается вокруг горизонтальной оси по закону $\varphi = 2t^2$ рад (положительное направление отсчета угла φ показано на рисунке дуговой стрелкой). По дуге радиуса R = 0,5 м движется точка M по закону s $=OM = \pi R\dfrac{t^3}{6}$ м; положительное направление отсчета криволинейной координаты s от O к D.

Определить абсолютную скорость $v_{аб}$ и абсолютное ускорение $a_{аб}$ в момент времени t = 1с.



К задаче 1.

Решение: Рассмотрим движение точки M как сложное, считая ее движение по дуге относительным, а движение вместе с пластиной - переносным.

Определим все характеристики относительного и переносного движений.

Относительное движение. Это движение происходит по закону

$$s = OM = \frac{\pi R}{4}\left(7t - 2t^2\right).$$

Сначала установим, где будет находиться точка M на дуге AOD в момент времени t=1c. Полагая в уравнении движения t=1c, получим $s_1 = \frac{5}{6}\pi R$. Тогда $\angle OCM = \frac{s_1}{R} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$. Покажем на рисунке точку в положении, определяемом этим углом.

Теперь находим численные значения v_{om}, a_{om}^{τ} и a_{om}^{n}:

$$v_{om} = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi R}{6} 3t^2;\ a_{om}^{\tau} = \frac{dv_{\text{от}}}{\text{dt}} = \pi R t;\ a_{om}^{n} = \frac{v_{om}^2}{\rho_{om}} = \frac{v_{om}^2}{R},$$

где ρ_{om}- радиус кривизны относительной траектории.

Для момента времени t=1c, учитывая, что R = 0,5 м, получим:

$$v_{om} = \frac{\pi R}{2} = \frac{\pi}{4}\text{м/с};\ a_{om}^{\tau} = \frac{\pi}{2} м/с^2;\ a_{om}^{n} = \frac{\pi^2}{8} м/с^2.$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{v}_{\text{от}}$ направлен в сторону положительного отсчета s, вектор $\bar{a}_{om}^{\tau}$ - в ту же сторону; вектор $\bar{a}_{om}^{n}$ направлен к центру C по радиусу MC.

Переносное движение. Это движение пластины (вращение) происходит по закону φ = 2t^2. Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 4t,\ \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 4.$$

Таким образом, при t = 1c;

$$\omega = 4c^{-1};\ \varepsilon = 4c^{-2}.$$

Для определения $v_{пер}$ и $a_{пер}$ найдем сначала расстояние точки M от оси вращения: $h = KB = 2R - R\cdot\cos30°$.

Тогда в момент времени t =1c получим: h = 0,57м.

$$v_{пер} = \omega \cdot h = 4 \cdot 0{,}57 = 2{,}28 \text{ м/с};$$

$$a_{пер}^{вр} = \varepsilon \cdot h = 4*0{,}57 = 2{,}28 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{пер}^{ц} = \omega^2 \cdot h = 42 \cdot 0{,}57 = 9{,}12 \text{ м/с}^2.$$

Показываем на рисунке вектор $\bar{v}_{пер}$ с учетом направления ω и векторы $\bar{a}_{пер}^{ц}$ (направлен к оси вращения), $\bar{a}_{пер}^{вр}$ (направлен как $\bar{v}_{пер}$).

Кориолисово ускорение. Так как угол между вектором $\bar{v}_{om}$ и вектором $\bar{\omega}$ равен 30°, то численно в момент времени t = 1c

$$a_{кор} = 2\,|\,\bar{v}_{om}\,|\,|\,\bar{\omega}\,|\cdot\sin30^\circ = 2\ \pi/4\ 4\ 1/2 = 3{,}14/c^2.$$

Направление вектора $\bar{a}_{кор}$ найдем, спроецировав вектор $\bar{v}_{om}$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена противоположно вектору $\bar{a}_{пер}^{ц}$), и повернув затем эту проекцию в сторону ω, т.е. по ходу вращения тела, на 90°. Изображаем вектор $\bar{a}_{кор}$ на рисунке.

Определение $v_{аб}$. Так как $\bar{v}_{\text{аб}} = \bar{v}_{\text{от}} + \bar{v}_{\text{пер}}$, а векторы $\bar{v}_{\text{от}}$ и $\bar{v}_{\text{пер}}$ взаимно перпендикулярны, то в момент времени t =1c

$$v_{аб} = \sqrt{v_{отн}^2 + v_{пер}^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + (2.28)^2} = 2{,}4 \text{ м/с}.$$

Определение $a_{аб}$. По теореме о сложении ускорений

$$\bar{a}_{аб} = \bar{a}_{om}^{\tau} + \bar{a}_{om}^{n} + \bar{a}_{пер}^{ц} + \bar{a}_{пер}^{вр} + \bar{a}_{кор}.$$

Для определения $a_{аб}$ проведем координатные оси $Mxyz$ и вычислим проекции вектора $\overline{a}_{аб}$ на эти оси. Учтем при этом, что векторы $\overline{a}_{\text{кор}}$, $\overline{a}_{\text{пер}}^{\text{вр}}$ лежат на проведенной оси x, а векторы $\overline{a}_{от}^{\tau}$, $\overline{a}_{от}^{n}$, $\overline{a}_{пер}^{ц}$ расположены в плоскости Myz. Получим для момента времени t = 1с:

$a_{\text{абx}} = a_{\text{кор}} + a_{пер}^{вр} = 5{,}42 \text{м/с}^2$;

$a_{\text{абy}} = -a_{от}^{n} \cos 60° + a_{от}^{\tau} \cos 30° = 0{,}74 \text{ м/с}^2$;

$a_{\text{абz}} = -a_{от}^{\tau} \cos 60° - a_{от}^{n} \cos 30° + a_{пер}^{ц} = 7{,}27 \text{ м/с}^2$.

Отсюда находим значение $a_{\text{аб}}$ в момент времени t_1 =1с:

$$a_{\text{аб}} = \sqrt{a_{абx}^2 + a_{абy}^2 + a_{абz}^2} = 9{,}1 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $v_{аб} = 2{,}4$ м/с;

$a_{аб} = 9{,}1 \text{м/с}^2$.

Вопросы и задания для самоконтроля

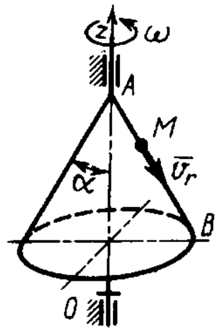
1. Какое движение точки называют относительным, переносным, абсолютным?

2. Напишите и объясните формулы, выражающие теоремы о сложении скоростей и ускорений точки.

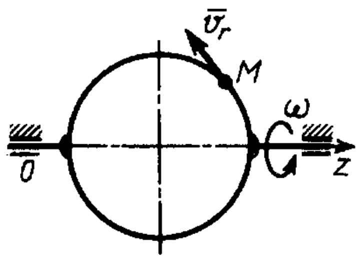
3. Как определить модуль и направление кориолисова ускорения?

4. Конус вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью $\omega = 3 \text{ с}^{-1}$. По его образующей с постоянной скоростью $v_r = v_{от} = 4$ м/с движется точка M в направлении от A к B. Определите модуль абсолютной скорости этой точки в положении, когда расстояние AM = 2 м, если угол $\alpha = 30°$ (Ответ: $v_{аб}$ = 5м/с).

5. Диск вращается вокруг оси Oz. По его ободу движется точка M с постоянной относительной скоростью $v_r = v_{от} = 9$ м/с. Определите переносную скорость точки M в момент, когда ее абсолютная скорость равна 15 м/с (Ответ: $v_{пер}$ = 12 м/с).



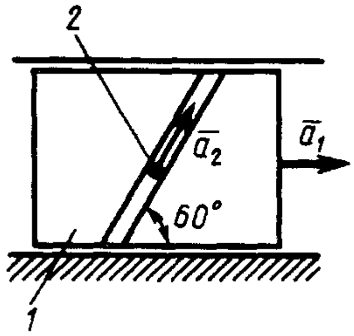
К заданию 4.



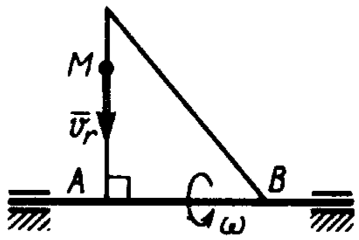
К заданию 5.

6. Ползун 1 движется по горизонтальным направляющим с постоянным ускорением $a_1 = 4 \text{ м/с}^2$. Точка 2 перемещается по отношению к ползуну с ускорением $a_2 = 3 \text{ м/с}^2$. Определите абсолютное ускорение точки (Ответ: $a_{аб} = 6{,}08 \text{ м/с}^2$).

7. По стороне треугольника, вращающегося вокруг стороны AB с угловой скоростью $\omega = 8 \text{ с}^{-1}$, движется точка M с относительной скоростью $v_r = v_{от} = 4$ м/с. Определите модуль ускорения Кориолиса точки M (Ответ: $a_{кор} = 64 \text{ м/с}^2$).



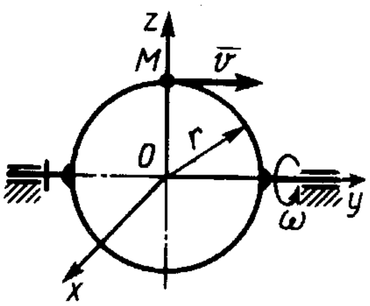
К заданию 6.



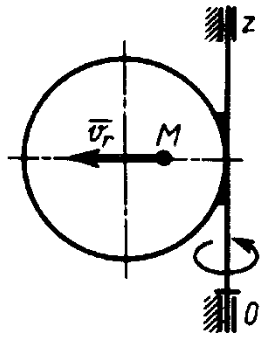
К заданию 7.

8. Точка M движется с постоянной скоростью v = 2 м/с по кольцу радиуса r = 0,5 м, который вращается с постоянной угловой скоростью ω = 4 с$^{-1}$. Определите модуль абсолютного ускорения точки M в указанном положении (Ответ: $a_{аб}$ = 16 м/с^2).

9. По диаметру диска, вращающегося вокруг оси Oz, движется точка M с относительной скоростью $v_r = v_{от} = 4t^3$ м/с. Определите модуль относительного ускорения точки M в момент времени t = 1 с (Ответ: $a_{от}$ = 64 м/с^2).



К заданию 8.



К заданию 9.

7. Плоскопараллельное движение тела

Скорость любой точки М плоской фигуры геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки А, принятой за полюс, и скорости, которую точка М получает при вращении фигуры вокруг этого полюса

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA};\ \bar{v}_{MA} \perp \overline{MA};\ v_{MA} = \omega \cdot MA,$$

где ω — угловая скорость фигуры, не зависящая от выбора полюса. Полюсом фигуры может быть любая ее точка.

Теорема о проекциях скоростей плоской фигуры: проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны, друг другу.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Следовательно, скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени как при вращении вокруг МЦС. При этом

$$v_A = \omega \cdot PA\ (\bar{v}_A \perp PA),$$

где P – МЦС.

Ускорение любой точки M плоской фигуры геометрически складывается из ускорения точки A, принятой за полюс, и ускорения, которое точка M получает при вращении фигуры вокруг этого полюса.

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}$$

Однако при решении задач удобнее вектор $\bar{a}_{MA}$ заменять его составляющими

$$\overline{a}_M = \overline{a}_A + \overline{a}_{MA}^{\tau} + \overline{a}_{MA}^{n}.$$

Вектор $\overline{a}_{MA}^{\tau}$ направлен перпендикулярно AM в сторону вращения, если оно ускоренное, и против вращения, если оно замедленное; вектор $\overline{a}_{MA}^{n}$ всегда направлен от точки M к полюсу A.

$$a_{MA}^{\tau} = AM{\cdot}\varepsilon;\quad a_{MA}^{n} = AM{\cdot}\omega^2,$$

где ε - угловое ускорение фигуры

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.1. Определите угловую скорость шатуна AB кривошипно-ползунного механизма в указанном положении, если точка А имеет скорость $v_A = 3$ м/с, а длина шатуна $AB = 3$ м.

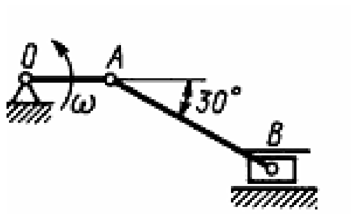
Ответ: $\omega_{AB} = 1{,}15$ с$^{-1}$

Задача 7.2. Определите угловую скорость кривошипа OA в указанном положении, если скорость ползуна $v_B = 2$ м/с, а длина кривошипа $OA = 0{,}1$ м.

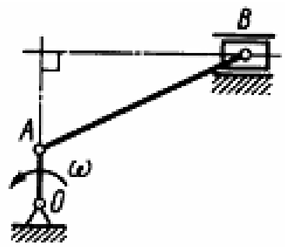
Ответ: $\omega_{OA} = 20$ с$^{-1}$

Задача 7.3. Барабан 1 вращается по закону $\varphi = 2t$. Определите скорость груза 2, если радиус r = 0,2 м.

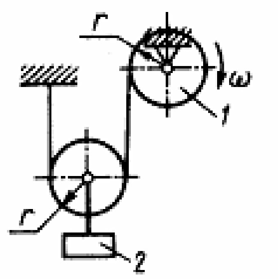
Ответ: $v_2 = 0{,}2$ м/с



К задаче 7.1



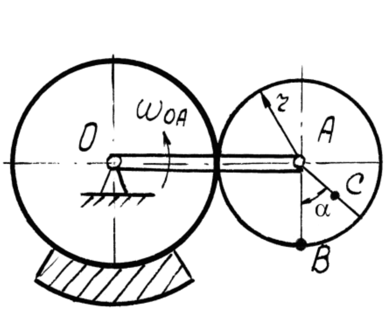
К задаче 7.2



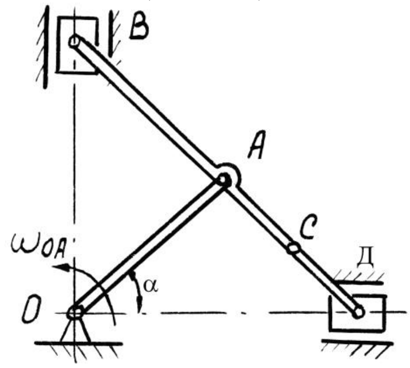
К задаче 7.3

Задача 7.4. Найти для механизма скорости и ускорения точек B и C, если $OA = 0{,}4$ м, $r = 0{,}15$ м, $AC = 0{,}1$ м, $\omega_{OA} = 2$ с$^{-1}$. При расчетах принимать $\alpha = 30^o$, $\alpha = 45^o$, $\alpha = 60^o$.

Задача 7.5. Найти для механизма скорости и ускорения точек A, B и C, $Д$ и угловые скорости всех звеньев, если известны угловая скорость кривошипа $\omega_{OA} = 4$ с$^{-1}$, $AB = OA = AД = 0{,}4$ м, $AC = 0{,}2$ м. При расчетах принимать $\alpha = 30^o$, $\alpha = 45^o$, $\alpha = 60^o$.



К задаче 7.4

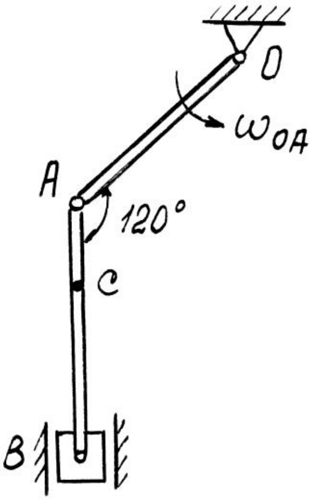


К задаче 7.5

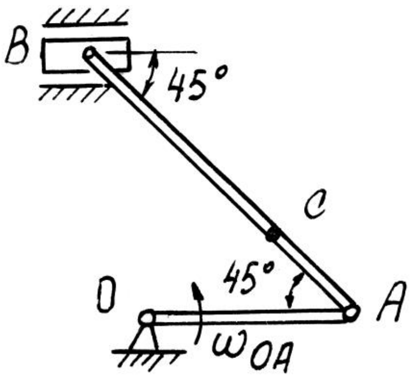
Задача 7.6. Для заданного положения механизма найти графическим способом скорости и ускорения точек B и C, если $OA = 0{,}25$ м, $AB = 0{,}35$ м, $AC = 0{,}15$ м, $\omega_{OA} = 2$ с$^{-1}$. При нахождении ускорений рассмотреть равноускоренное и равнозамедленное ($\varepsilon_{OA} = 2$ с$^{-2}$) вращение кривошипа OA

Задача 7.7. Для заданного положения механизма найти графическим способом скорости и ускорения точек B и C, если OA = 0,2 м, AB = 0,6 м, AC = 0,2 м, $\omega_{OA} = 2\ c^{-1}$. При нахождении ускорений рассмотреть равноускоренное и равнозамедленное ($\varepsilon_{OA} = 2\ c^{-2}$) вращение кривошипа OA

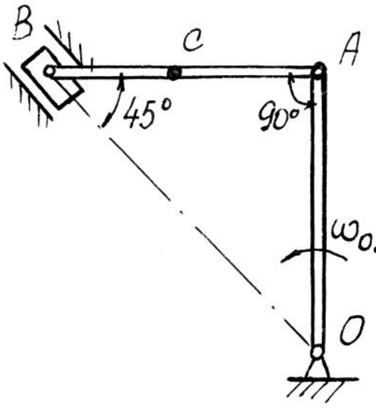
Задача 7.8. Для заданного положения механизма найти графическим способом скорости и ускорения точек B и C, если OA = 0,4 м, AB = 0,6 м, AC = 0,3 м, $\omega_{OA} = 2\ c^{-1}$. При нахождении ускорений рассмотреть равноускоренное и равнозамедленное ($\varepsilon_{OA} = 2\ c^{-2}$) вращение кривошипа OA



К задаче 7.6



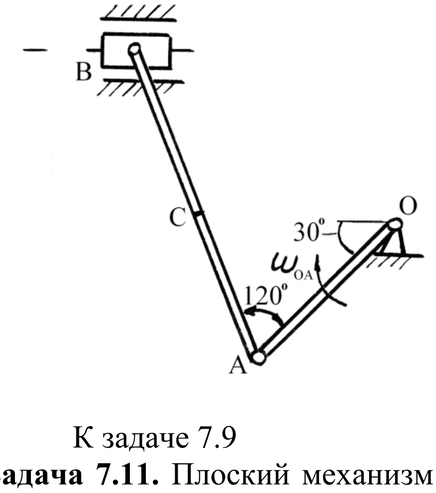
К задаче 7.7



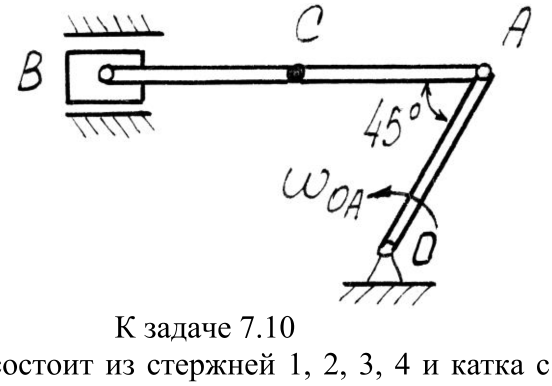
К задаче 7.8

Задача 7.9. Для заданного положения механизма найти графическим способом скорости и ускорения точек B и C, если OA = 0,5 м, AB = 0,8 м, AC = 0,3 м, $\omega_{OA} = 2\ c^{-1}$. При нахождении ускорений рассмотреть равноускоренное и равнозамедленное ($\varepsilon_{OA} = 2\ c^{-2}$) вращение кривошипа OA

Задача 7.10. Для заданного положения механизма найти графическим способом скорости и ускорения точек B и C, если OA = 0,4 м, AB = 0,8 м, AC = 0,5 м, $\omega_{OA} = 2\ c^{-1}$. При нахождении ускорений рассмотреть равноускоренное и равнозамедленное ($\varepsilon_{OA} = 2\ c^{-2}$) вращение кривошипа OA



К задаче 7.9

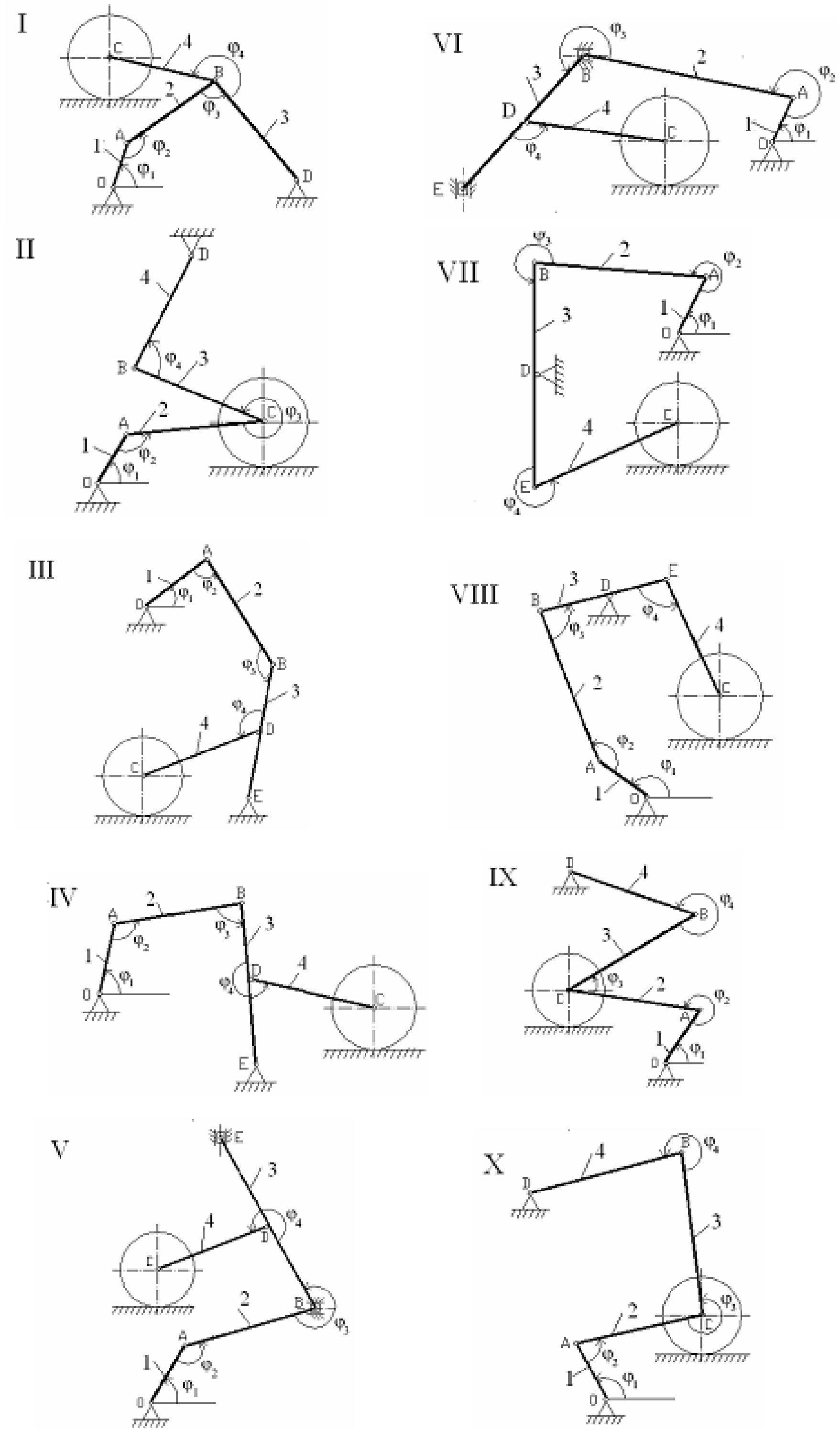


К задаче 7.10

Задача 7.11. Плоский механизм состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и катка с центром C, соединенных между собой шарнирами. На рисунке стержень 3 шарнирно соединен с ползунами B и E. Шарнир D находится в середине соответствующего стержня. Длины стержней равны соответственно: l_1 = 0,2 м; l_2 = 1,0 м; l_3 = 1,2 м; l_4 = 0,8 м. Радиус катка R = 0,4 м. Положение механизма определяется углами φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. Значения этих углов и скорости звеньев указаны в таблице, причем угловая скорость стержня 1 ω_1 и скорость центра катка v_C – величины постоянные.

Определить линейные скорости точек v и угловые скорости звеньев ω, указанные в столбце «Найти» таблице .

Построение чертежа следует начинать со стержня, направление которого определяется углом φ_1. Дуговыми стрелками на рисунках показано, как откладывать соответствующие углы при построении чертежа механизма. Заданную угловую скорость ω_1 считать направленной против хода часовой стрелки, а заданную скорость v_C – вправо.



К задаче 7.11

Таблица 5.

Номер варианта	Углы, град				Заданные скорости		Найти	
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	ω_1, $с^{-1}$	v_C, м/с	v точек	ω звеньев
1	30	120	30	60	–	4	В, А	2 и 3
2	0	120	90	120	2	–	С, В	2 и 4
3	60	60	60	120	–	6	В, А	2 и 3
4	0	150	30	60	3	–	С, В	2 и 4
5	30	120	120	60	–	8	В, А	2 и 3
6	90	120	90	60	4	–	С, В	2 и 4
7	0	120	90	120	–	2	В, А	2 и 3
8	30	120	30	60	5	–	С, В	2 и 4
9	90	120	90	60	–	5	В, А	2 и 3
10	60	60	60	120	6	–	С, В	2 и 4

Указания. При решении задачи для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) к каждому звену механизма в отдельности.

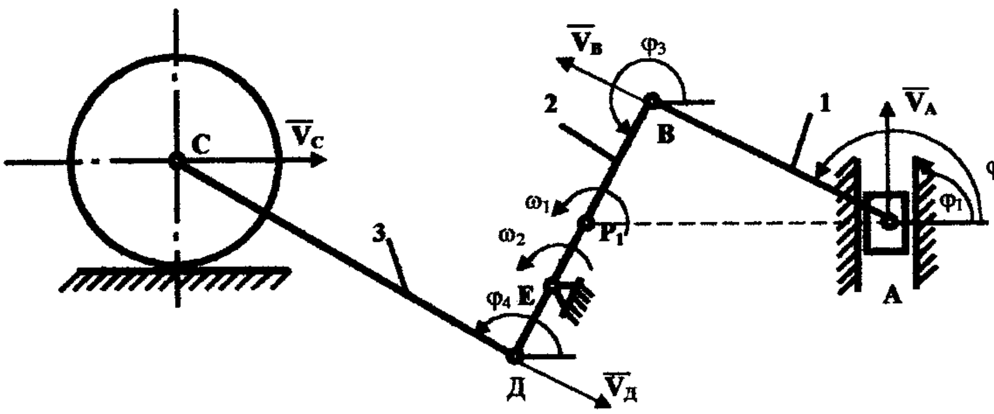
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Механизм состоит из стержней 1, 2, 3, ползуна *А* и катка, соединенных друг с другом и с неподвижной опорой *Е* шарнирами.

Дано: $\varphi_1 = 90°$; $\varphi_2 = 150°$; $\varphi_3 = 240°$; $\varphi_4 = 150°$; $l_1 = 1{,}0$ м; $l_2 = 0{,}9$ м; $l_3 = 1{,}0$ м; $BE = 2ДЕ$; $v_C = 4$ м/с.

Определить: скорости точек v_A, $v_Д$ и угловые скорости звеньев ω_1, ω_2.

Решение. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами.



К задаче 1.

Определяем скорость точки Д – $v_Д$. Точка Д принадлежит стержню СД. Чтобы найти $v_Д$, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление вектора $\bar{v}_{Ä}$. По данным задачи известны скорость центра катка $v_C = 4$ м/с и направление его вектора– параллельно поверхности, по которой катится каток. Направление вектора $\bar{v}_{Ä}$ найдем, учтя, что точка Д принадлежит еще и стержню ДВ, вращающемуся вокруг Е; следовательно, $\bar{v}_{\text{Ä}} \perp$ ДВ. Теперь, зная направление векторов $\bar{v}_c$ и $\bar{v}_{\text{Ä}}$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня *СД*) на прямую, соединяющую эти точки. Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\bar{v}_{\text{Ä}}$ (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$v_C \cos 30° = v_Д; \qquad v_Д = v_C \cos 30° = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 3{,}5 \text{ м/с}.$$

Определяем скорость точки А – v_A. Точка А принадлежит стержню *АВ*. Следовательно, надо сначала найти скорость точки *В*, принадлежащей одновременно стержню *ВД*. Так как стержень *ВД* вращается вокруг *Е*, то вектор $\bar{v}_{\text{Â}} \perp$ ВД и направлен в сторону поворота стержня. Величину скорости v_B найдем из пропорции

$$\frac{v_Д}{ДЕ} = \frac{v_E}{BE}.$$

Так как $BE = 2ДЕ$, следовательно,

$$v_B = \frac{v_Д \cdot BE}{ДЕ} = \frac{v_Д \cdot 2ДЕ}{ДЕ} = 2v_Д = 2 \cdot 3{,}5 = 7 \text{ м/с}.$$

Поскольку точка *А* принадлежит одновременно ползуну, движущемуся поступательно вдоль направляющих, то линия действия $\bar{v}_A$ известна. Тогда, зная направление векторов $\bar{v}_B$ и $\bar{v}_A$, построим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня *АВ*; это точка P_1, лежащая на пересечении перпендикуляров к векторам $\bar{v}_B$ и $\bar{v}_A$, восстановленных из точек *В* и *А*. По направлению вектора $\bar{v}_B$ определяем направление поворота стержня *АВ* вокруг МЦС. Вектор $\bar{v}_A$ будет направлен в сторону поворота стержня *АВ*. Учитывая, что

$$v_B = \omega_1 \cdot BP_1; \; v_A = \omega_1 \cdot AP_1,$$

получим

$$\frac{V_B}{BP_1} = \frac{V_A}{AP_1}.$$

Вычислим BP_1 и AP_1. Треугольник AP_1B – прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30º и 60º, и тогда

$$AP_1 = \frac{AB}{\cos 30^o} = \frac{1{,}0}{0{,}87} = 1{,}2 \text{ м};$$

$$BP_1 = AP_1 \sin 30º = 1{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}6 \text{ м}.$$

В результате $V_A = \frac{V_B \cdot AP_1}{BP_1} = \frac{7 \cdot 1{,}2}{0{,}6} = 14{,}0$ м/с.

Определяем величину угловой скорости стержня *АВ* - ω_1:

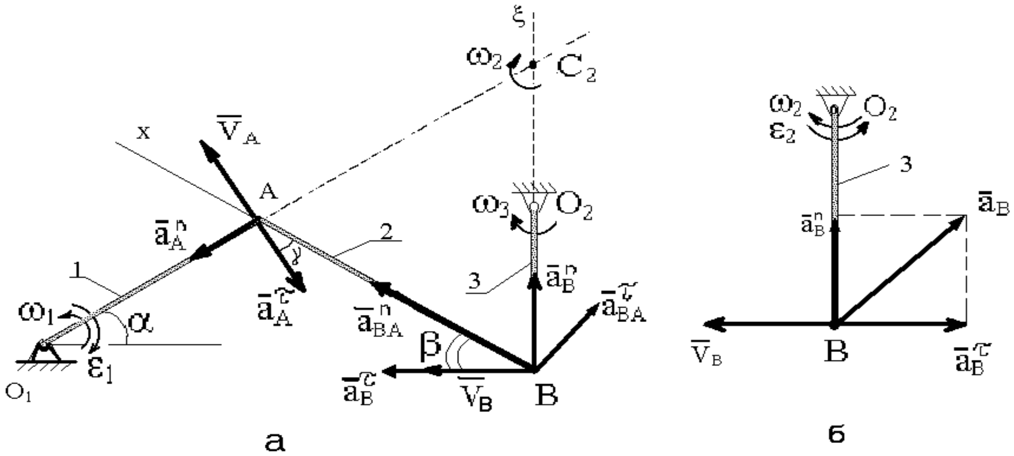
$$\omega_1 = \frac{V_B}{BP_1} = \frac{7}{0{,}6} = 11{,}7 \text{ c}^{-1}.$$

Определяем величину угловой скорости стержня *ВД* - ω_2:

$$\omega_2 = \frac{V_B}{BE} = \frac{V_B}{l_2} = \frac{7}{0{,}9} = 7{,}8 \text{ c}^{-1}.$$

Ответ: $v_A = 14{,}0$ м/с; $v_Д = 3{,}5$ м/с; $\omega_1 = 11{,}7$ с$^{-1}$; $\omega_2 = 7{,}8$ с$^{-1}$.

Задача 2. Механизм состоит из стержней 1, 2, 3 соединенных друг с другом и неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами. Длины стержней $l_1 = 2$ м, $l_2 = 4$ м, $l_3 = 1{,}25$ м. В момент времени, когда $\alpha = \beta = 30°$ и $\angle O_1AB = 120°$, для стержня 1 известны величины и направления угловой скорости и углового ускорения: ω_1=0,5 с$^{-1}$, ε_1 = 1 с$^{-2}$. Для этого механизма определить скорость и ускорение точки В, угловые скорости и угловые ускорения стержней 2 и 3.



К задаче 2.

Решение. Определим скорости $\overline{V}_A$, ω_2, ω_3.

Рассматривая вращательное движение стержня l, находим

$$V_A = \omega_1 l_1 = 1 \text{ м/с}, \ \overline{V}_A \perp \overline{OA}, \ \gamma = 30°$$

Теперь для стержня 2 находим положение мгновенного центра скоростей – точку C_2 (из чертежа видно, что $C_2A = C_2B = AB$ = 4 м) и определяем

$$\omega_2 = V_A/C_2A = 0{,}25 \text{ с}^{-1}, \ V_B = \omega_2 \cdot C_2B = 1 \text{ м/с}$$

Так как стержень 3 совершает вращательное движение вокруг оси O_2, то

$$\omega_3 = V_B/l_3 = 0{,}8 \text{ с}^{-1}$$

Определяем ускорение точки B. Так как точка B движется по окружности радиуса O_2B, то направление $\overline{a}_B$ неизвестно. В этом случае вектор $\overline{a}_B$ следует представить как сумму двух его составляющих $\overline{a}_B^\tau$ и $\overline{a}_B^n$. Приняв для стержня 2 точку A за полюс, получим равенство

$$\overline{a}_B^\tau + \overline{a}_B^n = \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_A^n + \overline{a}_{BA}^\tau + \overline{a}_{BA}^n .$$

Вектор $\overline{a}_A^n$ направлен вдоль AO, и $\overline{a}_A^\tau$ перпендикулярно AO в направлении дуговой стрелки ε_1. Их числовые значения

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 1 \text{ м/с}^2 \quad .$$

Изображаем на рисунке вектор $\overline{a}_{BA}^n$ (вдоль отрезка BA от B к A) и находим его числовое значение

$$\overline{a}_{BA}^n = \omega_2^2 l_2 = 0{,}25 \text{ м/с}^2$$

Численное значение $\overline{a}_{BA}^\tau$ в соответствии с можно определить как $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 l_2$, однако в данном случае угловое ускорение ε_2 неизвестно. Для вектора $\overline{a}_{BA}^\tau$ укажем на рисунке направление (предположив, что ε_2 направлено против хода часовой стрелки).

Вектор $\overline{a}_B^n$ будет направлен вдоль BO_2 и численно равен

$$\overline{a}_B^n = \overline{V}_B^2 / l_3 = \omega_3^2 l_3 = 0{,}8 \text{ м/с}^2$$

Неизвестный вектор $\bar{a}_B^\tau$ направим перпендикулярно O_2B (предположим, что угловое ускорение ε_3 направлено по ходу часовой стрелки).

Таким образом, из величин, входящих в векторное уравнение ускорений неизвестны только числовые значения $\bar{a}_B^\tau$ и $\bar{a}_{BA}^\tau$, которые можно найти, спроектировав обе части этого уравнения на две оси.

В проекции уравнения на направление BA (ось x), получим

$$\bar{a}_B^\tau \cos\beta + \bar{a}_B^n \cos\beta = -\bar{a}_A^\tau \cos\gamma + \bar{a}_A^n \sin\gamma + \bar{a}_{BA}^n$$

Подставив числовые значения найденных ускорений, найдем $\bar{a}_B^\tau$ = – 1,8 м/с^2. Знак минус указывает, что направление $\bar{a}_B^\tau$ противоположно показанному на рисунке, *а*.

На рисунке, *б* для стержня O_2B механизма показаны фактические направления векторов скорости и ускорения точки B, определенные расчетом механизма.

Теперь вычислим полное ускорение точки В:

$$a_B = \sqrt{\left(a_B^\tau\right)^2 + \left(a_B^n\right)^2} = 1{,}97 \text{ м/с}^2$$

Определим угловое ускорение стержня 2.

Спроектировав векторное уравнение ускорений на направление BC_2 (ось ξ), получим

$$\bar{a}_B^n = -\bar{a}_A^\tau \cos\alpha - \bar{a}_A^n \sin\alpha + \bar{a}_{BA}^n \sin\beta + \bar{a}_{BA}^\tau \cos\beta$$

Подставив числовые значения, найдем $\bar{a}_{BA}^\tau$= 3,36 м/с^2. Так как $\bar{a}_{BA}^\tau$> 0, то фактически вектор $\bar{a}_{BA}^\tau$ направлен, как показано на рисунке, *а*.

Пользуясь формулой $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 l_2$, получим $\varepsilon_2 = \dfrac{a_{BA}^\tau}{l_2}$= 0,84 с$^{-2}$, направление ε_2 – против хода часовой стрелки.

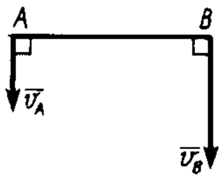
Определяем угловое ускорение стержня 3.

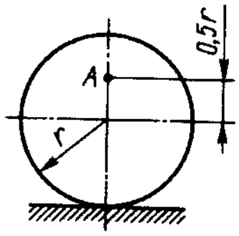
Стержень 3 совершает вращательное движение вокруг оси O_2. Из равенства $a_B^\tau = \varepsilon_3 l_3$ получим $\varepsilon_3 = \dfrac{a_B^\tau}{l_3} = 1{,}44$ с$^{-2}$. Направление ε_3 – против хода часовой стрелки.

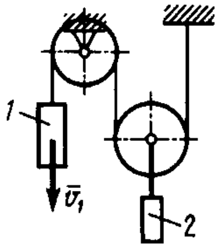
Ответ: V_B = 1 м/с, ω_2 = 0,25 с$^{-1}$, ω_3 = 0,8 с$^{-1}$, a_B = 1,97 м/с^2, ε_2 = 0,84 с$^{-2}$, ε_3=1,44 с$^{-2}$.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что называют мгновенным центром скоростей?
2. Как определить скорости точек тела при плоскопараллельном движении с помощью МЦС?
3. Как определить скорости точек тела при плоскопараллельном движении с помощью теоремы о проекциях скоростей точек плоской фигуры?
4. Как определить ускорение произвольной точки тела при плоскопараллельном движении?
5. Стержень AB длиной 80 см движется в плоскости чертежа. В некоторый момент времени точки A и B стержня имеют скорости v_A = 0,2 м/с, v_B = 0,6 м/с. Определите угловую скорость стержня. (Ответ: ω_{AB} = 0,5 с$^{-1}$).
6. Определите угловую скорость колеса, если точка A имеет скорость v_A = 10 м/с, а радиус колеса r = 0,2 м. (Ответ: ω =33,3 с$^{-1}$).
7. Скорость груза 1 v_1 = 0,5 м/с. Определите скорость груза 2. (Ответ: v_2 = 0,25 м/с).



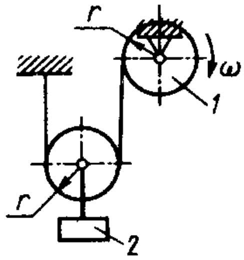


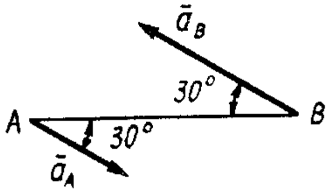


К заданию 5. К заданию 6. К заданию 7.

8. Барабан 1 вращается по закону $\varphi = 0{,}1t^2$. Определите ускорение груза 2, если радиус r = 0,2 м (Ответ: $a_2 = 0{,}02$ м/с^2).

9. Стержень длиной $AB = 40$ см движется в плоскости чертежа. В некоторый момент времени точки A и B стержня имеют ускорения $a_A = 2$ м/с^2 и $a_B = 6$ м/с^2. Определите угловое ускорение стержня. (Ответ: $\varepsilon = 10$с$^{-2}$)





К заданию 8. К заданию 9.

ДИНАМИКА

8. Дифференциальные уравнения движения точки

Основной закон динамики для материальной точки

$$m\bar{a} = \bar{R} \quad \text{или} \quad m\bar{a} = \sum \bar{F}_k .$$

Дифференциальными уравнениями движения точки в проекциях на декартовые оси:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}\,;\; m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}\,;\; m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}\,.$$

Дифференциальные уравнения в проекциях на оси естественного трехгранника - касательную $M\tau$ к траектории точки, главную нормаль Mn, направленную в сторону вогнутости траектории, и бинормаль Mb

$$m\frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau};\; m\frac{v^2}{\rho} = \sum F_{kn};\; 0 = \sum F_{kb}$$

Первая задача динамики: по известному закону движения материальной точки найти равнодействующую всех сил, приложенных к ней.

Эта задача решается методом подстановки заданных уравнений закона движения в дифференциальные уравнения и дифференцированием соответствующих функций.

Вторая (основная) задача динамики состоит в том, что при известных действующих на материальную точку силах, определяют закон движения точки.

Метод решения этой задачи - интегрирование дифференциальных уравнений. При последовательном интегрировании каждого уравнения появляются постоянные интегрирования, которые следует определять из начальных условий задачи.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8.1. В шахте опускается равноускоренно лифт массы 260 кг. В первые 10 с он проходит 35 м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт.

Ответ: $T = 2418$ Н

Задача 8.2. Точка массой $m = 100$ кг движется по горизонтальной плоскости с ускорением $a = 0{,}3t$. Определить модуль силы, действующей на точку в направлении ее движения в момент времени $t = 3$ с.

Ответ: $F = 3{,}6$ Н

Задача 8.3. Тело массой $m = 100$ кг начинает движение из состояния покоя по горизонтальной шероховатой плоскости под действием постоянной силы F. Пройдя путь, равный 5 м, скорость тела становится равной 5м/с. Определить модуль силы F, если сила трения скольжения $F_{тр}$=20 Н.

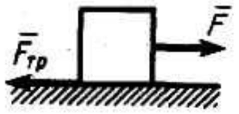
Ответ: $F = 270$ Н

Задача 8.4. По горизонтальной плоскости движется тело массой $m = 2$ кг, которому была сообщена начальная скорость $v_0 = 4$ м/с. До остановки тело прошло путь, равный 16 м. Определить модуль силы трения скольжения $F_{тр}$ между телом и плоскостью.

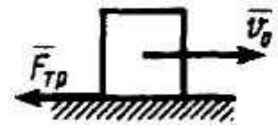
Ответ: $F_{тр} = 1$ Н

Задача 8.5. По наклонной плоскости спускается без начальной скорости груз массой m. Какую скорость v будет иметь груз, пройдя путь, равный 4 м от начала движения, если коэффициент трения скольжения между грузом и наклонной плоскостью равен 0,15?

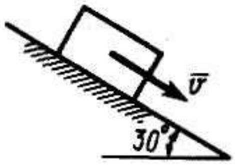
Ответ: $v = 5{,}39$ м/с



К задаче 8.3.



К задаче 8.4.



К задаче 8.5.

Задача 8.6. Деталь массой $m = 0{,}5$ кг скользит вниз по лотку. Под каким углом к горизонтальной плоскости должен быть расположен лоток, для того, чтобы деталь двигалась с ускорением $a = 2$ м/с^2.

Ответ: $\alpha = 11{,}8$ град.

Задача 8.7. Материальная точка массой $m = 8$ кг движется в горизонтальной плоскости согласно уравнениям $x = 0{,}05t^3$ $y = 0{,}3t^2$. Определить модуль равнодействующей приложенных к точке сил в момент времени 4 с.

Ответ: R =10,7 Н

Задача 8.8. Материальная точка массой $m =$ 14 кг движется по окружности $R = 7$ м с постоянным касательным ускорением $a_\tau = 0{,}5$ м/с^2. Определить модуль равнодействующей приложенных к точке сил в момент времени $t = 4$ с, если при t_0 скорость $v_0 = 0$.

Ответ: $R = 10{,}6$ Н

Задача 8.9. Материальная точка массой $m =$ 10 кг движется по окружности R по закону $s = at^2 - bt$, где s – дуговая координата, м; a и b - *постоянные величины;* t – текущее время. Определить модуль равнодействующей приложенных к точке сил в момент времени $t = 2$ с. Данные для расчета приведены в табл. 6.

Таблица 6

Вари-ант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	4	5	6	7	5	4	3	2	6	4
b	2	6	4	9	4	8	5	4	3	2
R , м	2	3	4	5	3	4	2	3	5	4

Задача 8.10. Тело движется вниз по наклонной шероховатой плоскости, которая образует с горизонтом угол 45°. Определить ускорение тела, если коэффициент трения скольжения f = 0,3.

Ответ: $a = 4{,}86$ м/с^2

Задача 8.11. Материальная точка массой $m = 900$ кг движется по горизонтальной прямой под действием силы $F = 270t$, которая направлена по той же прямой. Определить скорость точки в момент времени $t = 10$ с, если при t_0 скорость $v_0 = 10$ м/с.

Ответ: $v = 25$ м/с

Задача 8.12. Материальная точка массой $m = 25$ кг движется по горизонтальной прямой под действием силы $F = 20t$, которая направлена по той же прямой. Определить путь, пройденный точкой за 4 с.

Ответ: $s = 8{,}53$ м

Задача 8.13. Материальная точка массой $m = 100$ кг движется по горизонтальной прямой под действием силы $F = 20t$, которая направлена по той же прямой. Определить время, за которое скорость точки увеличилась с 5 до 25 м/с.

Ответ: $t = 20$ с

Задача 8.14. Материальная точка массой $m = 10$ кг движется по криволинейной траектории под действием силы $F = 0{,}4t$. Определить касательное ускорение точки в момент времени $t = 40$ с, если угол между силой и вектором скорости равен 30°

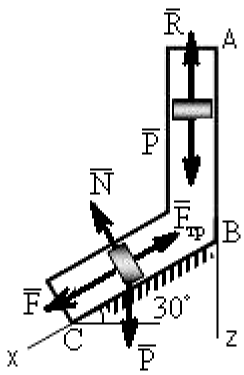
Ответ: $a_\tau = 1{,}39$ м/с^2

Примеры решения задач

Задача 1. На вертикальном участке *AB* трубы на груз массой $m = 5$ кг m действует сила тяжести и постоянная сила сопротивления $R = 40$ Н. Длина участка АВ $l_1 = 2$ м. В точке *A* груз имеет начальную скорость $V_0 = 6$ м/с. На наклонном участке *BC* на груз действует сила тяжести, сила трения (коэффициент трения груза о плоскость равен $f = 0{,}2$) и переменная сила $F_x = 45\sin(3t)$ Н.

Определить закон движения груза на участке *BC*: $x = x(t)$.

Решение. Рассмотрим движение груза на участке *AB*, считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\overline{P}$ и $\overline{R}$.



К задаче 1.

Проводим ось *Az* в направлении движения груза и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{dV_z}{dt} = \sum F_{kz}\ , \quad \text{или} \quad m\frac{dV_z}{dt} = P_z + R_z$$

Далее находим $P_z = P = mg$, $R_z = -R$.

При $V_z = V$ получим

$$m\frac{dV}{dt} = mg - R \text{ или } \frac{dV}{dt} = g - \frac{R}{m}. \qquad (1)$$

Тогда, разделяя в уравнении (1) переменные и интегрируя обе части равенства, приняв $g \approx 10$ м/с^2, получим

$$V = \left(g - \frac{R}{m}\right)t + C_1 = 2t + C_1. \qquad (2)$$

Из начальных условий при t = 0 скорость $V = V_0$, что даёт $C_1 = V_0$. Тогда уравнение (2) принимает вид

$$V = 2t + 6. \qquad (3)$$

Учитывая, что $V = \frac{dz}{dt}$, получим

$$\frac{dz}{dt} = 2t + 6.$$

Откуда при разделении переменных и интегрировании

$$z = t^2 + 6t + C_2. \qquad (4)$$

Из начальных условий при t = 0 и начальной координате $z_0 = 0$ находим $C_2 = 0$, следовательно

$$z = t^2 + 6t. \qquad (5)$$

С учётом условий задачи при $z = l_{AB} = 2$ м в точке B можно найти время $t = \tau_{AB}$ движения груза по участку AB:

$$2 = t^2 + 6t \quad \text{или} \quad t^2 + 6t - 2 = 0.$$

Извлекая корни, получим $t_1 = 0{,}3$ с; $t_2 = -6{,}3$ с, в физическом смысле $t = \tau_{AB} = 0{,}3$ с. Тогда по уравнению (3) скорость в точке B

$$V_B = 2\tau_{AB} + 6 = 6{,}6 \text{ м/с}. \qquad (6)$$

Теперь рассмотрим движение груза на участке BC; найденная скорость V_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($V_0 = V_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и показываем действующие на него силы $\bar{P}$, $\bar{N}$, $\bar{F}$ и $\bar{F}_{тр}$. Проведём из точки B ось Bx и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{dV_x}{dt} = P_x + N_x + F_x + F_{ðð}. \qquad (7)$$

Определим проекции сил на ось x:

$$P_x = P\sin 30° = 0{,}5mg; \qquad N_x = 0; \qquad F_x = 45\sin(3t);$$
$$F_{тр\,x} = -fN = -fP\cos 30° = -0{,}17mg,$$

тогда уравнение (8) примет вид

$$m\frac{dV_x}{dt} = 0{,}5mg + 45\sin(3t) - 0{,}17mg = 0{,}33mg + 45\sin(3t). \qquad (8)$$

Разделив обе части равенства на $m = 5$кг и принимая $g \approx 10$ м/с^2, получим

$$\frac{dV_x}{dt} = 3{,}3 + 9\sin(3t). \qquad (9)$$

Умножая обе части уравнения (9) на dt и интегрируя, найдём V_x:

$$V_x = 3{,}3t - 3\cos(3t) + C_2. \qquad (10)$$

На участке BC будем отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке B, считая в этот момент t = 0. Тогда при t = 0 скорость груза $V = V_0 = V_B$ = 6,6 м/с. Подставляя эти величины в уравнение (10), получим

$$C_2 = V_B + 3\cos(0) = 6{,}6 + 3 = 9{,}6.$$

При найденном значении C_2 уравнение (10) даёт

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 3{,}3t - 3\cos(3t) + 9{,}6.$$

Умножая обе части на dt и снова интегрируя, найдём

$$x = 1{,}65t^2 + 9{,}6t - \sin(3t) + C_3.$$

Так как на участке BC при t = 0 начальная координата x = 0, то C_3 = 0. Окончательно закон движения груза примет вид

$$x = 1{,}65t^2 + 9{,}6t - \sin(3t),$$

где x – в метрах, t – в секундах.

Ответ: $x = 1{,}65t^2 + 9{,}6t - \sin(3t)$.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Назовите основные законы механики.
2. Напишите дифференциальные уравнения движения материальной точки в координатной форме, в проекциях на естественные оси.
3. Какие задачи динамики материальной точки можно решать с помощью дифференциальных уравнений движения?
4. Тело массой m = 50 кг, подвешенное на тросе, поднимается вертикально с ускорением a = 0,5 м/с^2. Определите силу натяжения троса. (Ответ: T = 516 Н)
5. Определите модуль равнодействующей сил, действующих на материальную точку массой m = 3 кг в момент времени t = 6 с, если она движется по оси Ox согласно уравнению $x = 0{,}04t^3$. (Ответ: R = 4,32 Н)
6. Тело массой m = 20 кг падает по вертикали, сила сопротивления воздуха $R = 0{,}04v^2$. Определите максимальную скорость падения тела. (Ответ: v = 70 м/с)
7. Материальная точка массой m = 900 кг движется по горизонтальной прямой под действием силы $F = 270t$, которая направлена по той же прямой. Определите скорость точки в момент времени t = 10 с, если при t_0 = 0 скорость v_0 = 10 м/с. (Ответ: v = 25 м/с)

9. Общие теоремы динамики

Теорема о движении центра масс системы:

$$M\bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e .$$

где $\bar{a}_C$ - ускорение центра масс системы; $\bar{F}_k^e$ - внешние силы

Дифференциальные уравнения движения центра масс в проекциях на оси координат

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e;\ M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e;\ M\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e .$$

Теорема об изменении количества движения системы в дифференциальной форме

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e .$$

В проекциях на координатные оси

$$\frac{dQ_x}{dt}=\sum F^e_{kx},\quad \frac{dQ_y}{dt}=\sum F^e_{ky},\quad \frac{dQ_z}{dt}=\sum F^e_{kz}.$$

Количество движения механической системы

$$\overline{Q}=M\overline{v}_C,$$

где $\overline{v}_C$ скорость ее центра масс

Импульс силы $\overline{F}$ за конечный промежуток времени t_1 вычисляется как предел интегральной суммы соответствующих элементарных импульсов, т. е.

$$\overline{S}=\int_0^{t_1}\overline{F}dt.$$

Теорема об изменении количества движения системы в интегральной форме:

$$\overline{Q_1}-\overline{Q_0}=\sum\overline{S}^e_k.$$

Теорема об изменении кинетического момента системы относительно неподвижного центра:

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt}=\sum\overline{m}_0(\overline{F}^e_k).$$

Производная по времени от главного момента количеств движения системы относительно некоторого неподвижного центра равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра.

В проекциях на оси координат:

$$\frac{dK_x}{dt}=\sum m_x(\overline{F}^e_k);\ \frac{dK_y}{dt}=\sum m_y(\overline{F}^e_k);\ \frac{dK_z}{dt}=\sum m_z(\overline{F}^e_k).$$

Момент количества движения точки относительно центра **O** определяется равенством

$$\overline{m}_O(m\overline{v}) = \overline{r}\times m\overline{v},)$$

где $\overline{r}$ - радиус-вектор движущейся точки, проведенный из центра O.

По модулю

$$|\overline{m}_O(m\overline{v})| = mv\cdot h.$$

Кинетический момент системы (главный момент количеств движения системы) относительно данного центра O

$$\overline{K}_0=\sum\overline{m}_0(m_k\overline{v}_k).$$

Кинетические моменты системы относительно координатных осей:

$$K_x = \sum m_x(m_k\overline{v}_k);\ K_y = \sum m_y(m_k\overline{v}_k);\ K_z = \sum m_z(m_k\overline{v}_k).$$

Кинетический момент вращающегося твердого тела вокруг оси z равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела

$$K_z = J_z\,\omega.$$

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы: изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.

$$T_1 - T_0 = \sum A^e_k+\sum A^i_k.$$

Кинетическая энергия тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на квадрат скорости центра масс.

$$Mv^2_C/2.$$

Кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента, инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.

$$T_{вр} = J_z\omega^2/2.$$

При плоскопараллельном движении кинетическая энергия тела равна энергии поступательного движения со скоростью центра масс v_C, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг центра масс.

$$T_{плоск} = M v_C^2/2 + J_C\omega^2/2.$$

Работа постоянной силы равна произведению модуля силы на перемещение точки ее приложения и на косинус угла между вектором силы и перемещением.

$$A_{(M_0M_1)} = F s_1 \cos\alpha.$$

Работа силы тяжести равна взятому со знаком плюс или минус произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки ее приложения. Работа положительна при опускании тела и отрицательна при его подъеме.

$$A_{(M_0M_1)} = \pm Ph$$

Работа силы упругости равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов начального и конечного удлинений (или сжатий) пружины.

$$A_{(M_0M_1)} = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2),$$

Работа силы при повороте тела равна произведению вращающего момента на угол поворота. Работа положительна в случае, когда направление момента совпадает с направлением поворота и отрицательна – когда поворот тела происходит против действия момента.

$$A = \int_0^{\varphi_1} M_z d\varphi \quad \text{или} \quad A = M_z \cdot \varphi.$$

Мощность - величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени.

$$N = dA/dt = F_\tau\, ds/dt = F_\tau v.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 9.1. Определить координаты x_C центра масс кривошипно-ползунного механизма при углах $\varphi = 90°$ и $\alpha = 30°$, если масса кривошипа 1 равна 4 кг, а масса шатуна 2 равна 8 кг. Шатун 2 длиной 0,8м считать однородным стержнем. Массой ползуна 3 пренебречь.

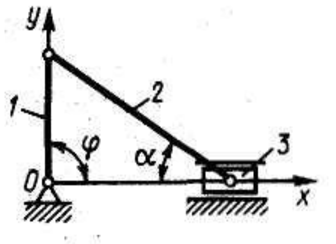
Ответ: $x_C = 0{,}231$ м

Задача 9.2. Тело 1 массой m = 50кг поднимается по наклонной плоскости с помощью троса, наматываемого на барабан 2 радиуса R=0,4м. Определить модуль главного вектора внешних сил, действующих на тело 1, если угловое ускорение барабана $\varepsilon = 5$ с$^{-2}$.

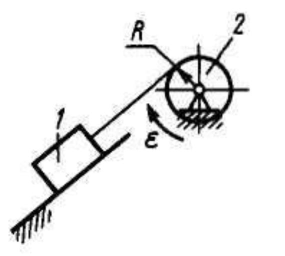
Ответ: $R^e = 100$ Н

Задача 9.3. Диск массой m = 20кг вращается равномерно вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\omega = 10$ с$^{-1}$. Определить модуль главного вектора внешних сил, приложенных к диску, если его центр тяжести удален от оси вращения на расстояние OC=0,5см.

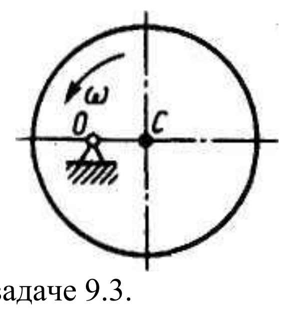
Ответ: $R^e = 100$ Н



К задаче 9.1.



К задаче 9.2.



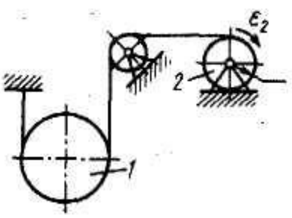
К задаче 9.3.

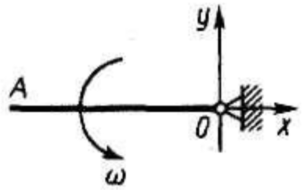
Задача 9.4. Шкив 2 радиуса R = 0,2м, вращаясь с угловым ускорением $\varepsilon_2 = 10$ с$^{-2}$, поднимает однородный цилиндр 1, масса которого m=50кг. Определить модуль главного вектора внешних сил, действующих на цилиндр.

Ответ: $R^e = 50$ Н

Задача 9.5. Однородный стержень OA массой m = 10кг вращается равномерно с угловой скоростью ω=10 с$^{-1}$. Определить модуль главного вектора внешних сил, действующих на стержень, если его длина OA=1м.

Ответ: R^e = 500 Н





К задаче 9.4. К задаче 9.5.

Задача 9.6. Материальная точка массой 0,5 кг движется по прямой. Определить модуль импульса равнодействующей всех сил, действующих на точку за первые 2 с, если она движется по закону $s = 4t^3$.

Ответ: S = 24 Нс

Задача 9.7. Шкив 1 радиуса R = 0,4м, вращаясь с угловой скоростью ω = 2,5 с$^{-1}$, поднимает груз массой m = 10кг. Определить количества движения груза.

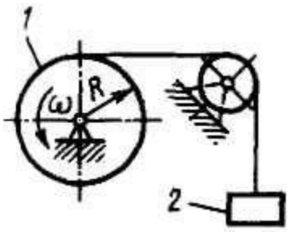
Ответ: mv = 10 кг м/с

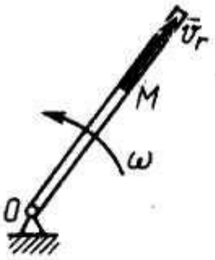
Задача 9.8. Трубка вращаясь с угловой скоростью ω = 10 с$^{-1}$. Относительно трубки движется шарик M массой m = 0,2кг со скоростью Vr = 4м/с. Определить модуль количества движения шарика в момент времени, когда расстояние OM = 0,4м.

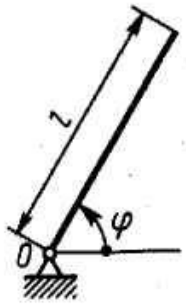
Ответ: mv = 1,13 кг м/с

Задача 9.9. Однородный стержень массой m = 10кг и длиной l = 1м вращается по закону $\varphi = 5t^2$. Определить модуль количества движения этого стержня в момент времени t = 2с.

Ответ: Q = 100 кг м/с







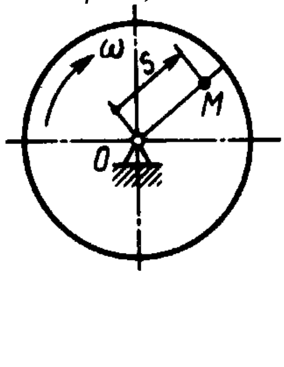
К задаче 9.7. К задаче 9.8. К задаче 9.9.

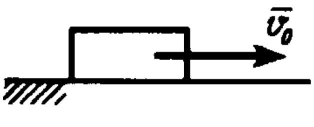
Задача 9.10. Диск вращается с угловой скоростью ω = 8 с$^{-1}$. По радиусу диска движется точка M массой m = 1 кг по закону s = 0,2t. Определить модуль количества движений этой механической системы в момент времени t = 0,5 с.

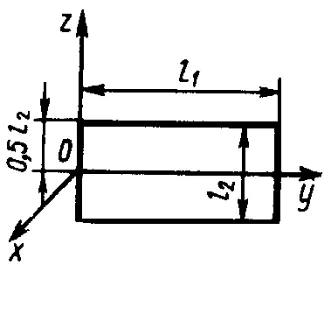
Ответ: Q = 0,825 кг м/с

Задача 9.11. Тело, которому сообщили начальную скорость v_0 = 5 м/с, скользит по шероховатой горизонтальной плоскости и остановилось через 1 с. Найти коэффициент трения скольжения.

Ответ: f = 0,5







К задаче 9.10. К задаче 9.11. К задаче 9.13.

Задача 9.12. Определить момент инерции однородного диска относительно оси, касающейся его обода и расположенной перпендикулярно плоскости диска. Масса диска m = 1 кг, его радиус R = 0,2 м.

Ответ: I_x = 0,06 кг м^2

Задача 9.13. Определите момент инерции тонкой однородной прямоугольной пластины массой m = 4 кг относительно оси Oy, если размеры l_1 = 0,4 м, l_2 = 0,2 м.

Ответ: I_{oy} = 0,06 кг м^2

Задача 9.14. Материальная точка M массой m = 0,5 кг движется со скоростью v = 2 м/с по прямой AB, Определите момент количества движения точки относительно начала координат, если расстояние OA = 1 м и угол α = 30°.

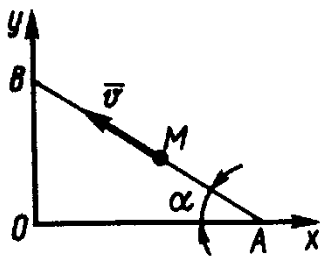
Ответ: 0,5 кг м^2/с

Задача 9.15. Материальная точка M массой m = 0,5 кг движется по кривой. Даны координаты точки: $x = y = z$ = 1 м и проекции скорости v_x = 1 м/с, v_y = 2 м/с, v_z = 4 м/с. Определить момент количества движения этой точки относительно оси Ox.

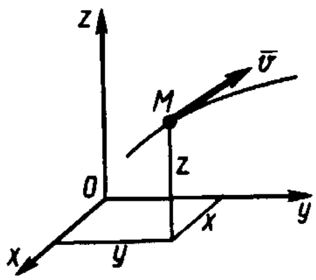
Ответ: 1 кг м^2/с

Задача 9.16. Трубка равномерно вращается с угловой скоростью ω = 10 с$^{-1}$. По трубке движется шарик массой m = 1 кг. Определить момент количества движения шарика относительно оси вращения трубки, когда расстояние OM = 0,5 м и скорость шарика относительно трубки v_r = 2 м/с.

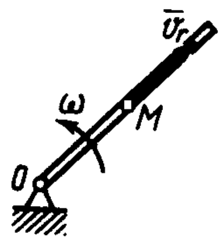
Ответ: 2,5 кг м^2/с



К задаче 9.14.



К задаче 9.15.



К задаче 9.16

Задача 9.17. Однородный стержень длиной l = 1 м и массой m = 6 кг лежащий в горизонтальной плоскости вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью ω = 10 с$^{-1}$. Определить количество движения стержня относительно центра О.

Ответ: mv= 30 кг м/с

Задача 9.18. Груз массой m = 4кг, опускаясь вниз, приводит с помощью нити во вращение цилиндр радиуса R = 0,4м. Момент инерции цилиндра относительно оси вращения I = 0,2кг м^2 . Определить кинетическую энергию системы тел в момент времени, когда скорость груза V = 2м/с.

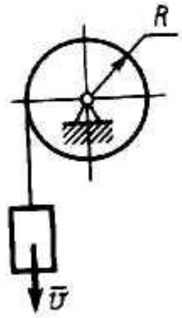
Ответ: T = 10,5 Дж

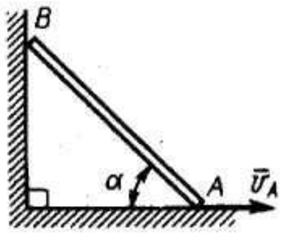
Задача 9.19. Однородный стержень AB длиной 2 м и массой m = 6кг при своем движении скользит концами A и B по горизонтальной и вертикальной плоскостям. Определить кинетическую энергию стержня в момент времени, когда угол α = 45° и скорость точки A равна 1м/с.

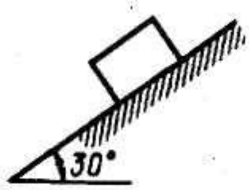
Ответ: T = 2 Дж

Задача 9.20. По наклонной плоскости спускается без начальной скорости тело массой m = 1кг. Определить кинетическую энергию тела в момент времени, когда оно прошло путь, равный 3 м, если коэффициент трения скольжения f = 0,2.

Ответ: T = 9,6 Дж







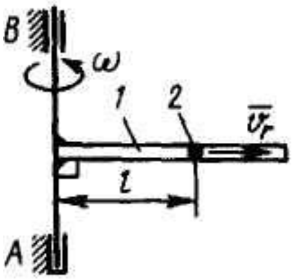
К задаче 9.18. К задаче 9.19. К задаче 9.20.

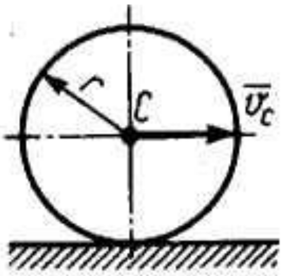
Задача 9.21. Труба 1 вращается равномерно с угловой скоростью ω = 2 $с^{-1}$ вокруг оси *AB*. Внутри трубки движется шарик 2 массой m = 0,5кг. Определить кинетическую энергию шарика в момент, когда он, находясь на расстоянии l = 0,5м от оси, имеет относительную скорость v_r = 0,2 м/с.

Ответ: T = 0,26 Дж

Задача 9.22. Диск массой m = 2кг радиуса r = 1м катится по плоскости, его момент инерции относительно оси, проходящей через центр C перпендикулярно плоскости рисунка, I_c = 2кг $м^2$. Определить кинетическую энергию диска в момент времени, когда скорость его центра v_C = 1м/с.

Ответ: T = 2 Дж





К задаче 9.21. К задаче 9.22.

Задача 9.23. Определить работу, совершенную постоянной силой F = 1 Н при подъеме тела на расстояние s = 1 м по наклонной плоскости.

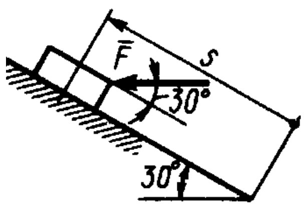
Ответ: A = 0,87 Дж

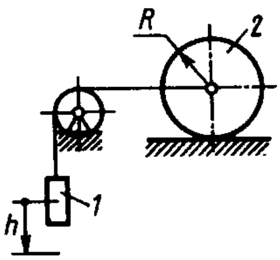
Задача 9.24. Груз 1 массой m_1 = 2 кг приводит в движение каток 2 массой m_2 = 1 кг. Коэффициент трения качения δ = 0,01 м. Определите работу внешних сил системы при опускании груза 1 на высоту h = 1 м, если радиус катка R = 0,1 м.

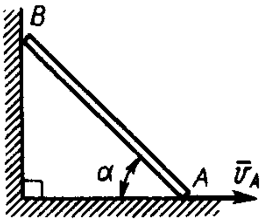
Ответ: A =18,6 Дж

Задача 9.25. Однородный стержень *AB* длиной 2 м и массой m = 4 кг при своем движении скользит концами *A* и *B* по горизонтальной и вертикальной плоскостям от вертикального положения. Определить работу силы тяжести стержня в момент времени, когда угол α = 45°.

Ответ: A = 229,1 Дж







К задаче 9.23. К задаче 9.24. К задаче 9.25.

Задача 9.26. Груз массой m = 4 кг, опускаясь вниз, приводит с помощью нити во вращение цилиндр радиуса R = 0,4 м. Момент инерции цилиндра относительно оси вращения I =

0,2 кг м^2. Определить кинетическую энергию системы тел в момент времени, когда скорость груза v = 2 м/с.

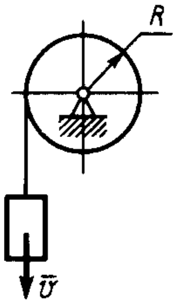
Ответ: T = 10,5 Дж

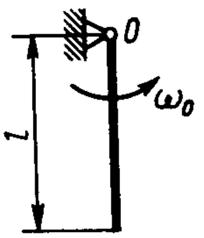
Задача 9.27. Какую начальную угловую скорость ω_0 надо сообщить однородному стержню длиной l = 3 м, чтобы он, вращаясь вокруг горизонтальной оси O, сделал пол-оборота?

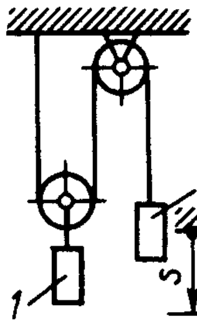
Ответ: v_0 = 4,43 м/с

Задача 9.28. Определить скорость груза 2 в момент времени, когда он опустился вниз на расстояние s = 4 м, если массы грузов m_1 = 2 кг, m_2 = 4 кг. В начальный момент система тел находилась в покое.

Ответ: v_2 = 7,2 3 м/с







К задаче 9.26. К задаче 9.27. К задаче 9.28.

Задача 9.29. Механическая система состоит из прямоугольной вертикальной плиты 1 массой m_1 = 20 кг и груза D массой m_2 = 6 кг; плита движется вдоль горизонтальных направляющих (рис.29.1–29.5) или вращается вокруг вертикальной оси Z, лежащей в плоскости плиты (рис. 29.6–29.10). В момент времени t_0 = 0 груз начинает двигаться под действием внутренних сил по имеющемуся на плите желобу: закон его движения s = AD = s(t) задан в табл.7, где s выражено в метрах, t – в секундах. Форма желоба на рис. 29.2, 29.1, 29.9, 29.10 – прямолинейная, на рис. 29.3–29.8 окружность радиуса R = 1,2 м с центром в центре масс C_1 плиты. Плита, изображенная на рис. 29.1–29.5, имеет при t_0 = 0 скорость V_0 = 0, на рис. 29.6–29.10 – угловую скорость ω_0 = 4 с$^{-1}$. В это время на плиту начинает действовать вращающий момент или момент сил сопротивления (момент М относительно оси Z), заданный в таблице. Считая груз материальной точкой, следует определить (таблица, столбцы 6, 7) V_1 – скорость плиты в момент времени t_1 = 1 с; N_1 – полную силу нормального давления плиты на направляющие в момент времени t_1 = 1 с (указать, куда сила $\bar{N}_1$ направлена); ω_1 – угловую скорость плиты в момент времени t_1 = 1 с; ω_1 = f (t)– угловую скорость плиты как функцию времени.

На рисунках груз показан в положении, при котором s = AD > 0 (при s < 0 груз будет находиться по другую сторону от точки А).

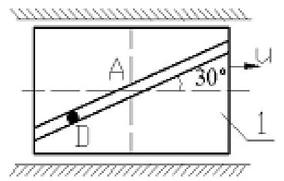


Рис. 29.1

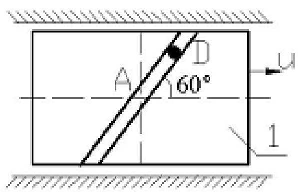


Рис. 29.2

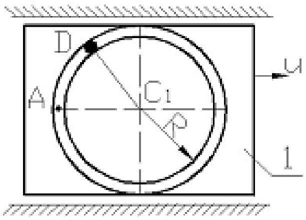


Рис 29.3

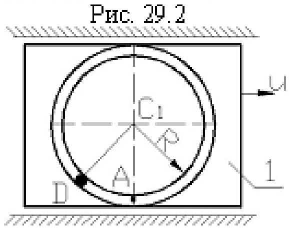


Рис. 29.4

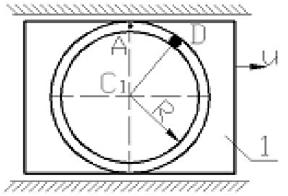


Рис. 29.5

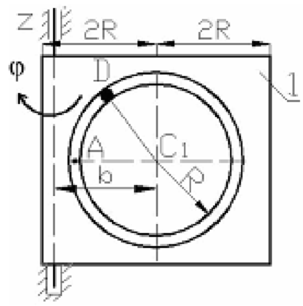


Рис. 29.6

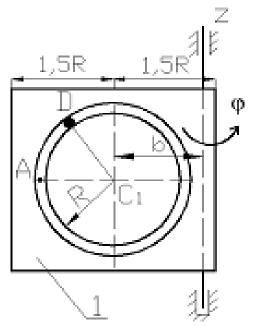


Рис. 29.7

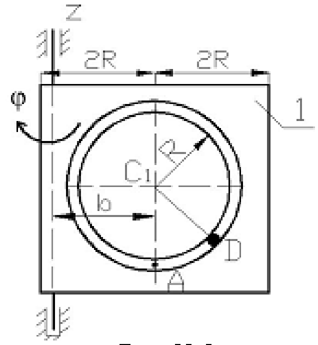


Рис. 29.8

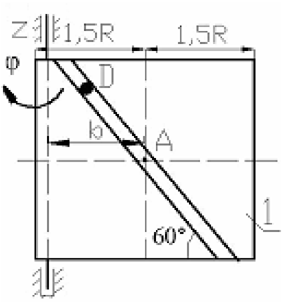


Рис. 29.9

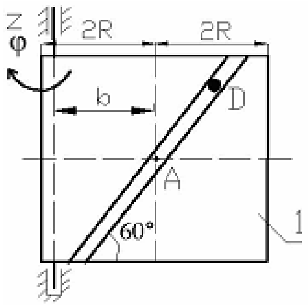


Рис. 29.10

К задаче 9.29

Таблица 7

Номер Вари-анта	Закон движения груза Д S = s(t), м		Расстоя-ние до оси Z b, м	Момент сил M, кНм	Найти	
	Рис. 29.1–29.2, 29.9–29.10	Рис. 29.3–29.8			Рис. 29.6–29.10	Рис. 29.1–29.5
1	2	3	4	5	6	7
1	$0{,}6\sin\left(\frac{\pi}{3}t^2\right)$	$\frac{\pi R}{3}t^2$	0,6	8	$\omega_1 = f(t)$	N_1
2	$0{,}4(1-3t^2)$	$\frac{\pi R}{3}(-2t^2)$	1,6	0	ω_1	V_1
3	$0{,}4\sin(\pi t^2)$	$\frac{\pi R}{2}t^2$	1,2	12	$\omega_1 = f(t)$	N_1
4	$0{,}8\cos\left(\frac{\pi}{4}t^2\right)$	$\frac{\pi R}{6}t^2$	1,6	0	ω_1	V_1
5	$0{,}3(1-3t^2)$	$\frac{\pi R}{6}2t^2$	0,6	0	ω_1	V_1
6	$0{,}8\sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)$	$\frac{\pi R}{2}(t^2-1)$	1,2	–12	$\omega_1 = f(t)$	N_1
7	$0{,}6t^2$	$\frac{\pi R}{3}t^2$	0,6	0	ω_1	V_1
8	$0{,}4(2t^2-1)$	$\frac{\pi R}{6}(-t^2)$	1,6	0	ω_1	N_1
9	$0{,}6\cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)$	$\pi R t^2$	0,6	–8	$\omega_1 = f(t)$	V_1
10	$1{,}2\cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)$	$\frac{\pi R}{4}t^2$	1,6	0	ω_1	N_1

Указания. В задаче, где требуется определить реакцию связи N_1, целесообразно воспользоваться теоремой о движении центра масс, а там, где нужно определить скорость тела V_1, – теоремой об изменении количества движения. Теорема об изменении кинетического момента применяется в задачах, где нужно найти угловую скорость вращения плиты ω_1.

При решении задачи необходимо учесть, что абсолютная скорость груза складывается из относительной и переносной скоростей (определяется так же, как при сложном движении точки), т.е. $\overline{V}_D = \overline{V}_{пер} + \overline{V}_{OT}$. Момент инерции плиты относительно оси Z, проходящей через центр масс C_1 плиты, равен $I_z = \frac{m_1 l^2}{12}$, где l – ширина плиты. Для определения момента инерции I_z относительно оси, не проходящей через точку C_1 плиты, необходимо воспользоваться теоремой Гюйгенса о моментах инерции относительно параллельных осей.

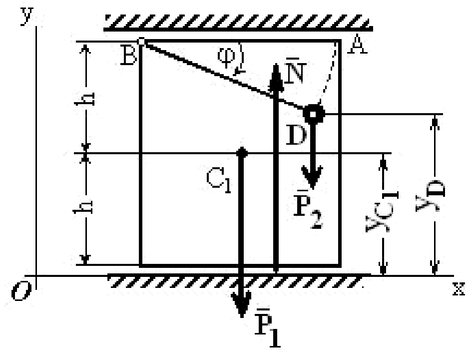
Примеры решения задач

Задача 1. К вертикальной прямоугольной плите массой $m_1 = 16$ кг с помощью невесомого шарнирного стержня BD длиной $l = 0{,}5$ м прикреплен груз *D* массой $m_2 = 4$ кг (рис. Д2, *а*). Плита движется по горизонтальным направляющим без трения. В момент времени t = 0 стержень начинает вращаться в плоскости плиты вокруг точки *B*, и длина дуги s = AD изменяется по закону

$$s = \frac{\pi \cdot l}{4}(2 - t^2),$$

где s – в метрах, t – в секундах.

Определить реакцию *N* направляющих в момент времени t = 2 с.



К задаче 1.

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из плиты и груза *D,* и изобразим действующие на нее внешние силы $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ и реакцию $\bar{N}$. Проведем координатные оси .

Для определения N воспользуемся теоремой о движении центра масс системы и составим дифференциальное уравнение его движения в проекции на ось y:

$$m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e \quad \text{или} \quad m\ddot{y}_C = N - P_1 - P_2 \qquad (1)$$

где *m* – масса системы; $P_1 = m_1 g$; $P_2 = m_2 g$.

Из формулы, определяющей ординату y_C центра масс системы, следует, что для рассматриваемой системы

$$m \cdot y_C = m_1 \cdot y_{C1} + m_2 \cdot y_D. \qquad (2)$$

Если принять высоту плиты равной 2*h*, то, как видно на рисунка

$$y_{C1} = h, \quad y_D = 2h - l \cdot \sin\varphi,$$

где угол $\varphi = \frac{s}{l} = \frac{\pi}{4} \cdot (2 - t^2)$,

$$\sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi \cdot t^2}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi \cdot t^2}{4}\right). \qquad (3)$$

Тогда, используя равенства (2) и (3), получим

$$my_C = m_1 \cdot h + 2m_2 \cdot h - m_2 \cdot l \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t^2}{4}\right).$$

Вычисляя производные и учитывая, что *h* = const, получим

$$m\dot{y}_C = \frac{\pi}{3} m_2 \cdot l \cdot t \cdot \sin\left(\frac{\pi t^2}{4}\right);$$

$$m\ddot{y}_C = \frac{\pi}{2} m_2 \cdot l \cdot \sin\left(\frac{\pi t^2}{4}\right) + \frac{\pi^2}{4} m_2 \cdot l \cdot t^2 \cos\left(\frac{\pi t^2}{4}\right).$$

Подставив значение $m\ddot{y}_C$ в равенство (1), найдем зависимость *N* = *N*(t):

$$N = P_1 + P_2 + \frac{\pi}{2} m_2 \cdot l \cdot \sin\left(\frac{\pi t^2}{4}\right) + \frac{\pi^2}{4} m_2 \cdot l \cdot t^2 \cos\left(\frac{\pi t^2}{4}\right).$$

Отсюда при *t* = 2 с определим искомую величину реакции направляющих плиты N = 211,7 Н.

Ответ: N = 211,7 Н.

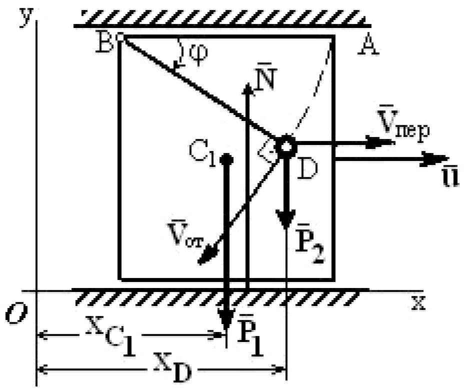
Задача 2. К вертикальной прямоугольной плите массой m_1 = 16 кг с помощью невесомого шарнирного стержня BD длиной l = 0,5 м прикреплен груз D массой m_2 = 4 кг. Плита движется по горизонтальным направляющим без трения и при t = 0 ее скорость $u = u_0 = 0$.

В момент времени t = 0 стержень начинает вращаться в плоскости плиты вокруг точки B, и длина дуги s = AD изменяется по закону

$$s = \frac{\pi \cdot l}{4}(2 - t^2),$$

где s – в метрах, t – в секундах.

Определить скорость плиты u в момент времени t = 2 с.



К задаче 2.

Решение. Рассматриваем механическую систему, состоящую из плиты и груза, и изображаем действующие на нее внешние силы $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ и реакцию $\bar{N}$. Покажем вектор скорости плиты $\bar{u}$, предположив, что плита движется вправо.

Проводим оси *xy.* Для определения *u* воспользуемся теоремой об изменении количества движения системы в дифференциальной форме

$$\frac{dQ}{dt} = \sum \bar{F}_k. \tag{1}$$

Учитываем, что для рассматриваемой системы

$$\bar{Q} = \bar{Q}^{пл} + \bar{Q}^{D}, \tag{2}$$

где $\bar{Q}^{пл} = m_1\bar{u}$ и $\bar{Q}^{D} = m_2 \cdot \bar{V}_D$ – количества движения плиты и груза соответственно.

Составляя уравнение (1) в проекции на ось *x*, получим

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^{e} = P_{1x} + P_{2x} + N_x = 0$$

Отсюда, с учетом выражения (2), следует, что

$$m_1 \cdot u_x + m_2 \cdot V_{Dx} = C_1. \tag{3}$$

Для определения проекции на ось *x* скорости груза V_{Dx} рассмотрим движение груза как сложное, считая его движение по отношению к плите относительным, а движение самой плиты – переносным.

Тогда вектор скорости груза $\bar{V}_D = \bar{V}_{пер} + \bar{V}_{OT}$, где численно $V_{пер} = u$, а $V_{от} = \dot{s}$. Покажем вектор $\bar{V}_{OT}$, направив его перпендикулярно *BD* в сторону положительного отсчета *s* или φ, и определим проекцию вектора $\bar{V}_D$ на ось *x;* получим $V_{Dx} = u_x - V_{от}\sin\varphi$, где значение sin φ дает равенство (3) из предыдущей задачи.

При найденном значении V_{Dx}, если учесть, что $u_x = u$, а

$$V_{OT} = \dot{s} = \frac{\pi l}{2} t$$

равенство (3) примет вид

$$\left(m_1+m_2\right)u+m_2\frac{\pi\cdot l}{2}t\cos\left(\frac{\pi\cdot t^2}{4}\right)=C_1. \qquad (4)$$

По начальным условиям при t = 0 u = 0, что дает C_1 = 0, и окончательно из (4) находим

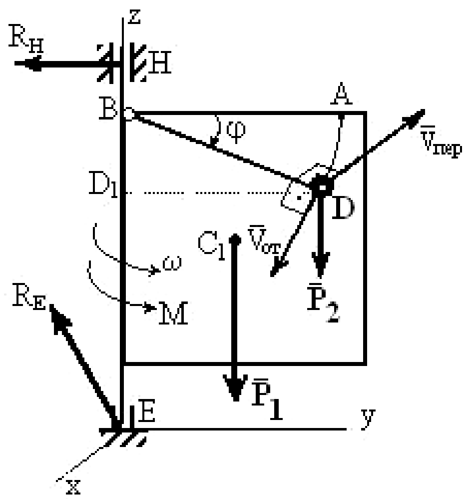
$$u=-\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{\pi\cdot l}{2}t\cos\left(\frac{\pi\cdot t^2}{4}\right).$$

Этот результат определяет зависимость *u* от *t*. Полагая здесь *t* = 2 с, найдем величину искомой скорости *u* = 0,314 м/с.

Ответ: *u* = 0,314 м/с (скорость направлена вправо).

Задача 3. К плите массой m_1 = 16 кг с помощью невесомого шарнирного стержня *BD* длиной *l* = 0,5 м прикреплен груз D массой m_2.= 4 кг. Вертикальная прямоугольная плита вращается вокруг оси *z* и в момент времени *t* = 0, когда угловая скорость плиты $\omega = \omega_0 = 4\ c^{-1}$, на нее начинает действовать вращающий момент *M* = *kt*; где *k* = 8 Нм/с. В этот же момент времени стержень начинает вращаться в плоскости плиты вокруг точки *B*, и длина дуги *AD* изменяется по закону $s=\frac{\pi\cdot l}{4}(2-t^2)$, где *s* – в метрах, *t* – в секундах.

Определить ω = f(t) – зависимость угловой скорости плиты от времени.



К задаче 3.

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из плиты и груза D, и изобразим действующие на нее внешние силы: силы тяжести $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, реакции $\bar{R}_E$, $\bar{R}_H$ подпятника и подшипника и вращающий момент *M*. Покажем на рисунке оси *x*, *y*, *z*: ось *y* лежит в плоскости плиты, а ось *x* ей перпендикулярна. Используем теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси *z*:

$$\frac{dK_z}{dt}=\sum m_z(\bar{F}_k^e). \qquad (1)$$

Заметим, что, так как силы $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ параллельны оси *z*, а реакции $\bar{R}_E$ и $\bar{R}_H$ эту ось пересекают, то моменты всех этих сил относительно оси *z* равны нулю, т.е.

$$\sum m_z(\bar{F}_k^e)=M=kt,$$

и выражение (1) примет вид

$$\frac{dK_z}{dt}=kt. \qquad (2)$$

Умножая обе части этого уравнения на d*t* и интегрируя, получим

$$K_z=\frac{kt^2}{2}+C_1. \qquad (3)$$

Для рассмотренной механической системы кинетический момент

$$K_z = K_z^{пл} + K_z^D, \qquad (4)$$

где $K_z^{пл}$ и K_z^D – кинетические моменты относительно оси *z* плиты и груза *D* соответственно.

Поскольку плита вращается вокруг оси *z*, то

$$K_z^{пл} = I_z\omega \qquad (5)$$

где $I_z = \frac{m_1 l^2}{3}\cdot$ - момент инерции плиты относительно оси *z*.

Для определения K_z^D рассмотрим движение груза как сложное, считая его движение по отношению к плите относительным, а вращение плиты вокруг оси z – переносным движением. Тогда $\overline{V}_D = \overline{V}_{пер} + \overline{V}_{OT}$.

$$K_z^D = m_z(m_2\overline{V}_D) = m_z(m_2\overline{V}_{OT}) + m_z(m_2\overline{V}_{пер}) \qquad (6)$$

Следовательно, $m_z(m_2\overline{V}_{OT}) = 0$, т.к. вектор V_{OT} лежит в одной плоскости с осью *z*. Вектор $V_{пер}$ направлен перпендикулярно плите (противоположно оси x), и по модулю $V_{пер} = \omega\cdot DD_1$. Тогда

$$m_z(m_2\overline{V}_{пер}) = m_2 V_{пер} DD_1 = m_2\omega(DD_1)^2$$

На рисунка видно, что

$$DD_1 = l\cos\varphi = l\cos\frac{s}{l} = l\cos\frac{\pi l}{4l}(2 - t^2) = l\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t^2}{4}\right) = l\sin\frac{\pi t^2}{4}.$$

Подставив все найденные величины в равенство (6), получим

$$K_z^D = m_2\omega(DD_1)^2 = m_2\omega\cdot l^2\left(\sin\frac{\pi t^2}{4}\right)^2. \qquad (7)$$

Зная $K_z^{пл}$ и K_z^D, найдем из равенства (4) значение K_z, и тогда уравнение (3) примет вид

$$\left[\frac{1}{3}m_1 + m_2\left(\sin\frac{\pi t^2}{4}\right)^2\right]l^2\omega = \frac{kt^2}{2} + C_1$$

или, при подстановке исходных данных задачи,

$$0{,}25\left[5{,}3 + 4\left(\sin\frac{\pi t^2}{4}\right)^2\right]\omega = 4t^2 + C_1. \qquad (8)$$

Постоянную интегрирования C_1 определим по начальным условиям: при $t = 0$ $\omega = \omega_0 = 4\ c^{-1}$, получим $C_1 = 5{,}3$. По уравнению (8) находим искомую зависимость ω от t .

Ответ: $\omega = \dfrac{5{,}3 + 4t^2}{1{,}325 + \sin^2\dfrac{\pi t^2}{4}}$.

Примечание. Из полученного результата можно найти и значение ω_1 при $t = t_1$.

Однако, если по условиям задачи $M = 0$, то уравнение (2) даёт $K_z = const$, и тогда обычно проще не искать зависимость ω(*t*) в общем виде, а сначала определить положение груза *D* (т.е. угол φ_0) при $t = 0$ и вычислить значение K_{z_0} при $\varphi = \varphi_0$ и $\omega = \omega_0$ с помощью равенств, аналогичных (3)–(6); затем определить положение груза (угол φ_1) при $t = t_1$ и тем же путём найти K_{z_1} при $\varphi = \varphi_1$ и $\omega = \omega_1$.

Так, если в рассмотренном примере принять М = 0, то при t = 0 $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ и $DD_1 = 0$, а при $t = t_1 = 2$ с $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ и $DD_1 = 0$.

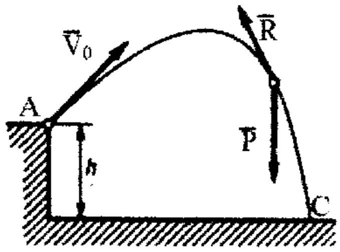
Тогда

$$K_{z_0} = \left(\frac{4}{3}m_1 l^2 + m_2 0\right)\omega_0;$$

$$K_{z_1} = \left(\frac{4}{3}m_1 l^2 + m_2 0\right)\omega_1.$$

Значение ω_1 находится из равенства $K_{z_1} = K_{z_0}$.

Задача 4. Груз массой m= 2 кг, брошенный со скоростью v_0= 20 м/с из пункта А, находящийся на высоте h = 5 м, имеет в точке падения C скорость v_1 = 16м/с. Определить, чему равна работа действующей на груз при его движении силы сопротивления воздуха $\overline{R}$.



К задаче 4.

Решение. На груз при его движении действуют сила тяжести $\overline{P}$ и сила сопротивления воздуха $\overline{R}$. По теореме об изменении кинетической энергии, считая груз материальной точкой, имеем

$$mv_1^2/2 - mv_0^2/2 = A(\overline{P}) + A(\overline{R}).$$

Из этого равенства, учитывая, что

$$A(\overline{P}) = Ph = mgh,$$

находим

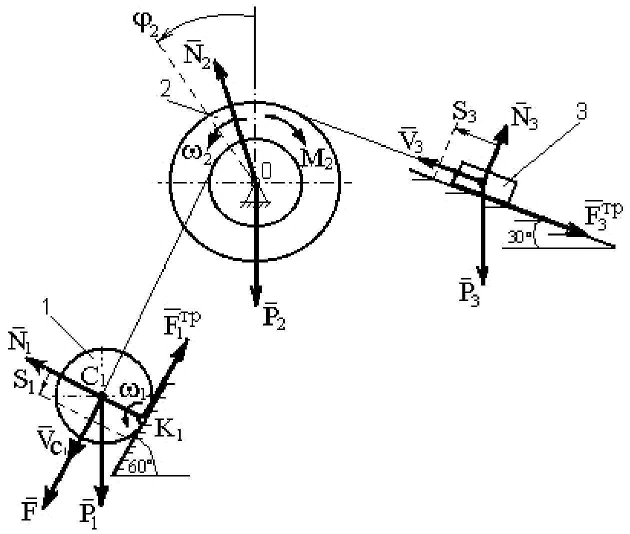
$$A(\overline{R}) = mv_1^2/2 - mv_0^2/2 - mgh = -242 \text{ Дж}$$

Ответ: $A(\overline{R}) = -242$ Дж

Задача 5. Механическая система состоит из сплошного цилиндрического катка 1, ступенчатого шкива 2 с радиусами ступеней R_2 = 0,2 м и r_2 = 0,1 м (масса шкива равномерно распределена по его внешнему ободу) и груза 3 (коэффициент трения груза о плоскость равен f= 0,1). Массы тел m_1 = 4 кг; m_2 = 10 кг; m_3 = 2 кг. Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкив 2.

Под действием силы F = 2 (1 + 2S) Н, зависящей от перемещения S точки её приложения, система приходит в движение из состояния покоя. При движении на шкив 2 действует постоянный момент M_2 0,6 Нм сил сопротивления. Определить скорость V_{C_1} центра масс катка, когда $S = S_1$ = 1 м.

Решение. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из тел 1, 2, 3, соединенных нитями. Изобразим все действующие на систему внешние силы: активные $\overline{F}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, момент сопротивления M_2, реакции $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$, $\overline{N}_3$ и силы трения $\overline{F}_1^{тр}$ и $\overline{F}_3^{тр}$.



К задаче 5.

Для определения V_{C1} воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e. \tag{1}$$

Определяем T_0 и T. Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \tag{2}$$

Учитывая, что тело 1 движется плоскопараллельно, тело 3 – поступательно, а тело 2 вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$T_1 = \frac{m_1 V_{C_1}^2}{2} + \frac{I_{C_1}\omega_1^2}{2};\ T_2 = \frac{I_2\omega_2^2}{2};\ \ T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2}. \tag{3}$$

Все входящие сюда скорости следует выразить через искомую V_{C_1}. Приняв во внимание, что точка K_1 – мгновенный центр скоростей катка l, и обозначив радиус катка через r_1, получим

$$\omega_1 = \frac{V_{C_1}}{K_1 C_1} = \frac{V_{C_1}}{r_1};\ \omega_2 = \frac{V_{C_1}}{r_2};\ V_3 = \omega_2 R_2 = V_{C_1}\frac{R_2}{r_2} \tag{4}$$

Кроме того, входящие в уравнение (3) моменты инерции имеют значения

$$I_{C_1} = 0{,}5 m_1 \cdot r_1^2;\ \ I_2 = m_2 \cdot R_2^2. \tag{5}$$

Подставив все величины (4) и (5) в равенства (3), получим кинетическую энергию системы:

$$T = \left(\frac{3}{4}m_1 + \frac{1}{2}m_2\frac{R_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2}m_3\frac{R_2^2}{r_2^2}\right)V_{C_1}^2 = 27 V_{C_1}^2 \quad . \tag{6}$$

Найдём сумму работ всех действующих внешних сил при том перемещении, которое будет иметь система, когда точка C_1 пройдет путь S_1, для чего учтем, что здесь зависимость между перемещениями будет такой же, как и между соответствующими скоростями в равенствах (4), т.е.

$$\varphi_2 = \frac{S_1}{r_2},\ S_3 = S_1\frac{R_2}{r_2}.$$

В результате получим

$$A(\bar{F}) = \int_0^{S_1} 2(1+2S)\,dS = 2(S_1 + S_1^2);$$

$$A(\bar{P}_1) = P_1 S_1 \sin 60^\circ; \quad A(M_2) = -M_2\varphi_2 = -M_2 \frac{S_1}{r_2};$$

$$A(\bar{P}_3) = -P_3 S_3 \sin 30^\circ = -P_3 S_1 \frac{R_2}{r_2} \sin 30^\circ;$$

$$A(F_3^{\text{тр}}) = -F_3^{\text{тр}} S_3 = fN_3 S_3 = -fP_3 \cos 30^\circ S_1 \frac{R_2}{r_2}$$

Работа остальных сил равна нулю, так как точка К$_1$ – мгновенный центр скоростей, точка О неподвижна, а реакция $\bar{N}_3$ перпендикулярна перемещению груза 3. Тогда окончательно

$$\sum A_k^e = 2(S_1 + S_1^2) + P_1 S_1 \sin 60^\circ - M_2 \frac{S_1}{r_2} - P_3 S_1 \frac{R_2}{r_2} (\sin 30^\circ + f \cos 30^\circ). \qquad (7)$$

С учетом значений заданных величин получим величину работ всех сил:

$$\sum A_k^e = 8{,}96. \qquad (8)$$

Подставив выражения (6) и (8) в уравнение (1) и учитывая, что $T_0 = 0$, получим

$$27 \cdot V_{C_1}^2 = 8{,}96.$$

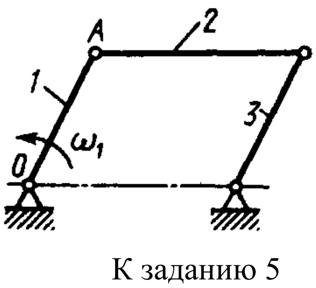
Отсюда находим искомую скорость.

Ответ: $V_{C_1} = 0{,}58$ м/с.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение механической системы.
2. Какими свойствами обладают внутренние силы в механической системе?
3. В чем отличие между центром масс и центром тяжести механической системы?
4. Однородный диск радиуса $R = 0{,}5$м, масса которого m=20кг, вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 10$ с$^{-2}$. Определить модуль главного вектора внешних сил, действующих на диск. (Ответ: $R^e = 0$ Н)
5. Кривошип 1 шарнирного параллелограмма вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_1 = 5$ с$^{-1}$. Определите модуль главного вектора внешних сил, действующих на звено 2, если его масса $m = 8$ кг, длина $OA = 0{,}4$ м. (Ответ: $R^e = 80$ Н)

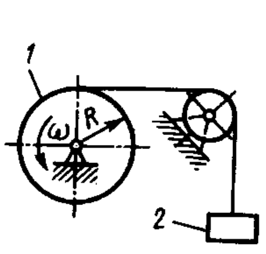
К заданию 4

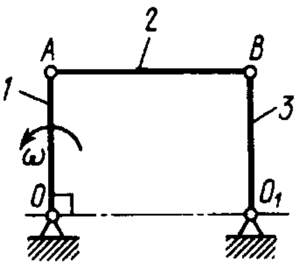


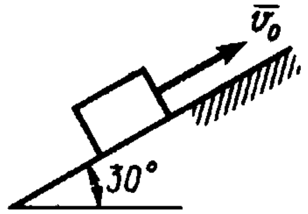
К заданию 5

6. Дайте определение количества движения механической системы.
7. Что называют импульсом силы?
8. Сформулируйте закон сохранения количества движения механической системы
9. Модуль постоянной по направлению силы изменяется по закону $F = 5+9t^2$. Найти модуль импульса этой силы за промежуток времени $\tau = t_2 - t_1$, где $t_2 = 2$ с, $t_1 = 0$. (Ответ: $S = 34$ Н с)

10. Шкив 1 радиуса R = 0,4 м, вращаясь с угловой скоростью ω=2,5 $с^{-1}$, поднимает груз 2 массой m = 10 кг. Определите модуль количества движения груза. (Ответ: mv = 10 кг м/с)







К заданию 10 К заданию 11 К заданию 12

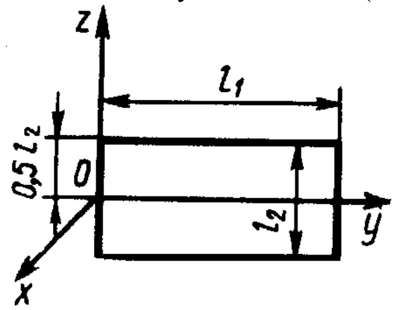
11. Звено 1 длиной OA = 1 м шарнирного параллелограмма $OABO_1$ вращается с угловой скоростью ω = 20 $с^{-1}$. Определите модуль количества движения механизма в указанном положении. Звенья 1, 2 и 3 считать однородными стержнями, массы которых $m_1 = m_2 = m_3$ = 4 кг. (Ответ: Q = 160 кг м/с)

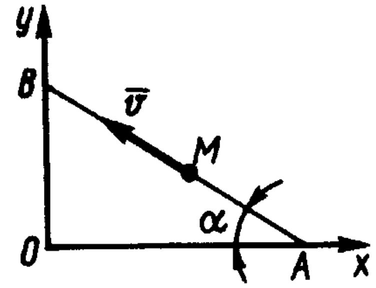
12. Телу, которое скользит по гладким наклонным направляющим, сообщили начальную скорость v_0 = 4 м/с. Определите, через какое время тело достигнет максимальной высоты подъема. (Ответ: t = 0,815 с)

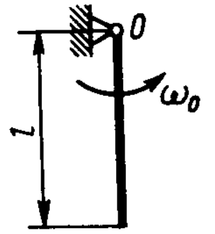
13. Определите момент инерции однородного диска относительно оси, касающейся его обода и расположенной перпендикулярно плоскости диска. Масса диска m = 1 кг, его радиус R = 0,2 м. (Ответ: I_x = 0,06 кг·$м^2$)

14. Определите момент инерции тонкой однородной прямоугольной пластины массой m = 3 кг относительно оси Ox, если размеры l_1 = 0,4 м, l_2 = 0,2 м. (Ответ: I_x = 0,17 кг·$м^2$)

15. Материальная точка M массой m = 0,5 кг движется со скоростью v = 2 м/с по прямой AB. Определите момент количества движения точки относительно начала координат, если расстояние OA = 1 м и угол α = 30°. (Ответ: 0,5 кг $м^2$/с)







К заданию 14 К заданию 15 К заданию 16

16. Однородный стержень длиной l = 1 м и массой m = 6 кг вращается с угловой скоростью ω = 10 $с^{-1}$. Определите кинетический момент стержня относительно центра O. (Ответ: $К_о$ = 20 кг $м^2$/с)

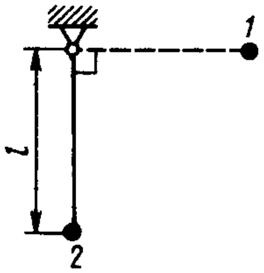
17. Материальная точка массой m = 0,5 кг движется по закону $\bar{r} = 2\bar{i} + (4\bar{t}^{2} + 5)\bar{j}$. Определите момент равнодействующей всех приложенных к этой точке сил относительно начала координат O. (Ответ: $M_о$ = 8 Н м)

18. Трубка вращается вокруг вертикальной оси Oz, ее момент инерции I_z = 0,075 кг·$м^2$. По трубке под действием внутренних сил системы движется шарик M массой m = 0,1 кг. Когда шарик находится на оси Oz, угловая скорость ω_0 = 4 рад/с. При каком расстоянии l угловая скорость равна 3 $с^{-1}$? (Ответ: l = 0,5 м)

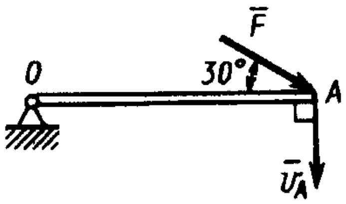
19. Груз массой m = 0,4 кг подвешен на нити длиной l = 1 м. Какую работу совершает сила тяжести груза при перемещении его в вертикальной плоскости из положения 2 в положение 1? (Ответ: A = -з,92 Дж)

20. На точку A кривошипа, который вращается вокруг горизонтальной оси O, действует в вертикальной плоскости сила F = 100 Н. Определите мощность силы $\overline{F}$, если скорость $\overline{v}_A$ точки A равна 4 м/с. (Ответ: N = 200 Вт)

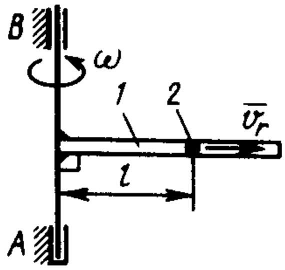
21. Трубка 1 вращается равномерно с угловой скоростью ω = 2 $с^{-1}$ вокруг оси AB. Внутри трубки движется шарик 2 массой m_2= 0,5 кг. Определите кинетическую энергию шарика в момент, когда он, находясь на расстоянии l = 0,5м от оси, имеет относительную скорость v_r = 0,2 м/с.(Ответ: T = 0,26 Дж)



К заданию 19.



К заданию 20.

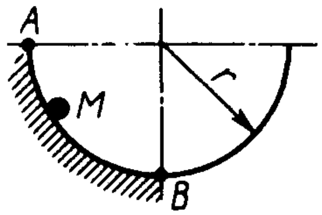


К заданию 21.

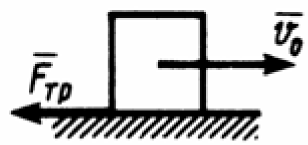
22. Материальная точка M массой m движется под действием силы тяжести по внутренней поверхности полуцилиндра радиуса r = 0,2 м. Определите скорость материальной точки в точке B поверхности, если ее скорость в точке A равна нулю. (Ответ: v_B = 1,98 м/с)

23. По горизонтальной плоскости движется тело массой m = 2 кг, которому была сообщена начальная скорость v_0 = 4 м/с. До остановки тело прошло путь, равный 16 м. Определите модуль силы трения скольжения $\overline{F}_{TP}$ между телом и плоскостью. (Ответ: F_{TP} = 1 Н)

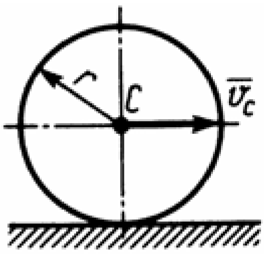
24. Диск массой m = 2 кг радиуса r = 1 м катится по плоскости, его момент инерции относительно оси, проходящей через центр C перпендикулярно плоскости рисунка, I_C = 2 кг $м^2$. Определите кинетическую энергию диска в момент времени, когда скорость его центра v_C = 1 м/с. (Ответ: T = 2 Дж)



К заданию 22.



К заданию 23.



К заданию 24

10. Аналитическая механика

П**ринцип Даламбера для системы**: если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме внешних и внутренних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной

$$\overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i + \overline{F}_k^u = 0,$$

Принцип Даламбера для материальной точки.

$$\overline{F}^a + \overline{R} + \overline{F}^u = 0.$$

Векторную величину $\overline{F}^u$, равную по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленную противоположно этому ускорению, называют силой инерции точки.

$$-m\overline{a} = \overline{F}^u$$

Главный вектор сил инерции механической системы (в частности, твердого тела) равен произведению массы системы (тела) на ускорение центра масс и направлен противоположно этому ускорению.

$$\bar{R}^{и} = -m\bar{a}_C$$

Главный момент сил инерции механической системы (твердого тела) относительно некоторого центра O или оси z равен, взятой, со знаком минус производной по времени от кинетического момента системы (тела) относительно того же центра или той же оси. т. е.

$$\bar{M}_0^{и} = -\frac{d\bar{K}_0}{dt} \text{ и } M_z^{и} = -\frac{dK_z}{dt},$$

При поступательном движении силы инерции твердого тела приводятся к равнодействующей проходящей через центр масс тела

$$\bar{R}^{и} = -m\bar{a}_C$$

При вращение тела вокруг оси, проходящей через центр масс тела. система сил инерции тела приводится к одной только паре с моментом

$$M_{Cz}^{и} = -J_{Cz}\cdot\varepsilon.$$

При плоскопараллельном движении тела система сил инерции тела приведется к силе, приложенной в центре масс C тела, и паре сил

$$\bar{R}^{и} = -m\bar{a}_C;\ M_{Cz}^{и} = -J_{Cz}\cdot\varepsilon.$$

Принцип возможных перемещений: для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю.

$$\sum\delta A_k^{a} = 0,$$

Возможным перемещением механической системы называют воображаемую совокупность элементарных перемещений точек этой системы, которые допускаются всеми наложенными на систему связями.

Идеальными называются связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении системы равна нулю

$$\sum\delta A_k^{R} = \sum\bar{R}_k\cdot\delta\bar{r}_k = 0.$$

Обобщенные координаты - независимые между собой параметры любой размерности, число которых равно числу степеней свободы системы и которые однозначно определяют ее положение

$$q_1, q_2, \ldots, q_s.$$

Производные от обобщенных координат по времени называются обобщенными скоростями системы.

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s.$$

Размерность обобщенной скорости зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты.

Величину Q_1 называют обобщенной силой, соответствующей координате q_1. Обобщенную силу определяют по формуле

$$Q_1 = \frac{\Sigma\delta A_1}{\delta q_1}.$$

Общее уравнение динамики.

$$\sum\delta A_k^{a} + \sum\delta A_k^{и} = 0$$

при движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю.

Уравнения Лагранжа или дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i,$$

где i - число степеней свободы системы;

T – кинетическая энергия системы

Задачи для самостоятельного решения

Задача 10.1. Материальная точка массой m = 2 кг скользит по негладкой горизонтальной плоскости под действием силы F = 10 Н, составляющей угол $\alpha = 30^{\circ}$ с горизонтальной плоскостью. Определить ускорение материальной точки, если коэффициент трения скольжения f = 0,1.

Ответ: a = 3,6 м/с^2

Задача 10.2. Груз массой m = 60 кг подвешен на нити, которая наматывается на барабан, вращающийся согласно уравнению $\varphi = 0{,}6t^2$. Определить натяжение каната, если радиус барабана R = 0,4 м.

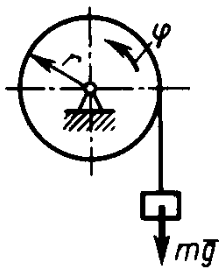
Ответ: T = 617 Н

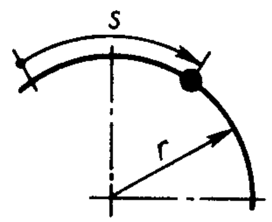
Задача 10.3. Материальная точка массой m = 10 кг движется по окружности радиуса r = 3 м согласно закону движения s = $4t^3$. Определите модуль силы инерции материальной точки в момент времени t = 1 с.

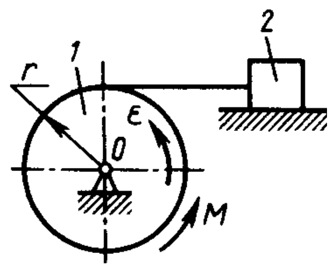
Ответ: $F^{и}$ = 537 Н

Задача 10.4. Барабан 1 радиуса r = 20 см под действием пары сил с моментом М вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 2$ с$^{-2}$. Определите модуль реакции в шарнире O, если коэффициент трения скольжения тела 2 по плоскости f = 0,1, а масса груза 2 равна 4 кг. Массой барабана пренебречь.

Ответ: R_o = 5,25Н







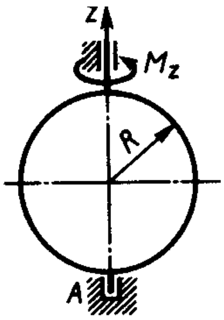
К задаче 10.2 К задаче 10.3 К задаче 10.4

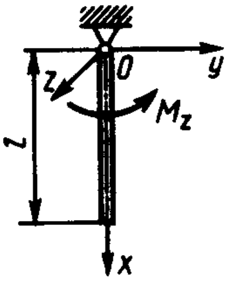
Задача 10.5.Определите угловое ускорение однородного тонкого диска радиуса R = 0,6 м, массой 4 кг, вращающегося вокруг вертикальной оси Az под действием момента Mz = 1,8 Нм

Ответ: $\varepsilon = 2{,}5$ с$^{-2}$.

Задача 10.6. Определите угловое ускорение вращения вокруг оси Oz однородного стержня. массой m = 3 кг и длиной l = 2 м. На стержень действует пара сил с моментом M_z = 2 Н · м.

Ответ: ε =0,5 с$^{-2}$.





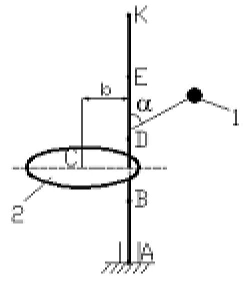
К задаче 10.5 К задаче 10.6

Задача 10.7. Тело массой m = 10 кг движется поступательно по горизонтальной плоскости. Каждая точка тела движется по окружности радиуса R = 0,5 м с постоянной скоростью 1,5 м/с. Определить модуль горизонтальной составляющей главного вектора внешних сил, действующих на тело.

Ответ: R_x^e = 45 Н.

Задача 10.8. Вертикальный невесомый вал АК (рис.8.1–8.10), вращающийся с постоянной угловой скоростью ω = 5 c^{-1}, закреплен подпятником в точке A и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в столбце 2 табл. 8 ($AB = BD = DE = EK = a$ = 1 м). К валу жестко прикреплены невесомый стержень 1 длиной l_1 = 0,8 м с точечной массой m_1 = 6 кг на конце и тело 2 массой m_2 = 10 кг с центром масс C. Тело 2 имеет форму сплошного однородного тонкого диска (рис.8.1, 8.2, 8.5, 8.6); сплошной тонкой квадратной пластины (рис. 8.3, 8.4); однородного тонкого кольца (рис. 8.7, 8.8); однородного горизонтального стержня (рис. 8.9, 8.10). Точка крепления стержня 1 и уровень крепления тела 2 указаны в столбцах 3 и 4 табл. 8. Угол наклона α стержня 1 – в столбце 5, расстояние b от центра масс C тела 2 до оси вала – в столбце 6. Определить величины реакций подпятника и подшипника.

Указания. При решении задачи следует принять, что центр масс C тела 2 и стержень 1 лежат в плоскости чертежа. Также следует учесть, что когда силы инерции частиц тела 2 имеют равнодействующую $\bar{R}^{È}$, то численно $R^{И} = m\,a_C$, где a_C – ускорение центра масс C тела 2.



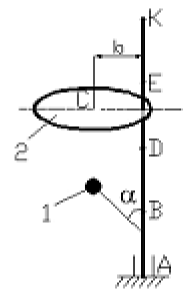
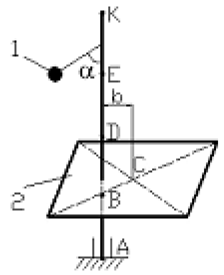


Рис. 8.1

Рис. 8.2



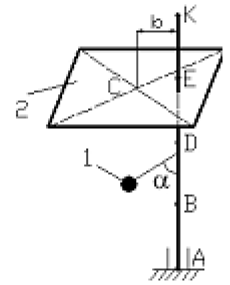
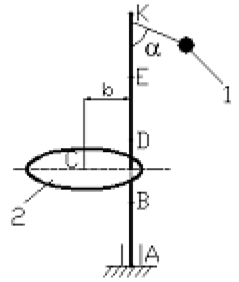


Рис. 8.3

Рис. 8.4



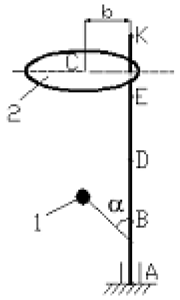
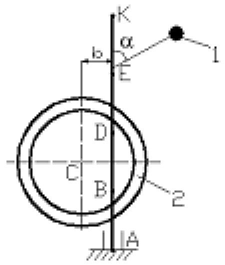


Рис. 8.5

Рис. 8.6



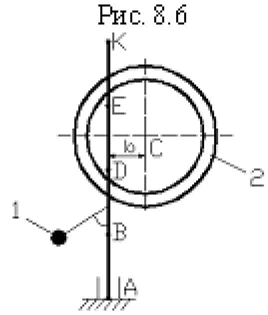
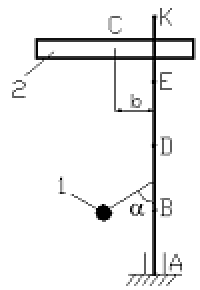


Рис. 8.7

Рис. 8.8



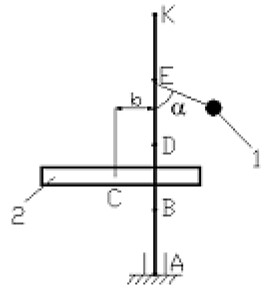


Рис. 8.9

Рис. 8.10

К задаче 10.8

Таблица 8

Номер Вари-анта	Точка установки подшип-ника	Точка крепле-ния стержня 1	Точка крепле-ния тела 2 (уровень цен-тра C)	Угол наклона стержня α, Град	Расстоя-ние *b*, м
1	2	3	4	5	6
1	B	D	K	30	0,1
2	D	B	E	45	0,2
3	E	D	B	60	0,3
4	K	D	E	75	0,1
5	B	E	D	90	0,2
6	D	K	B	30	0,3
7	E	B	K	45	0,1
8	K	E	B	60	0,2
9	D	E	K	75	0,3
10	E	K	D	90	0,2

Задача 10.9. Определите отношение между возможными перемещениями δs_A точки *A* кривошипа *OA* и δs_C точки *C* ползуна, если длины *OB* = *AB*.

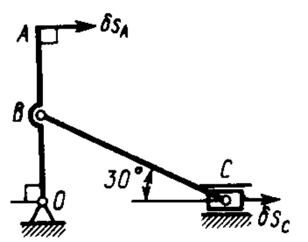
Ответ: 2

Задача 10.10. Определите отношение между возможными перемещениями δs_B точки *B* барабана 1 и δs_2 груза 2 дифференциального ворота, если радиусы $R = 2r = 20$ см.

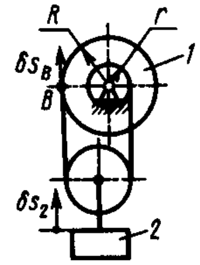
Ответ: 4

Задача 10.11. Определите момент *M* пары сил, который необходимо приложить к барабану 2 радиуса $r = 20$ см для равномерного подъема груза 1 весом 200 Н.

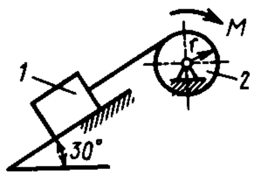
Ответ: $M = 20$ Нм



К заданию 10.9



К заданию 10.10



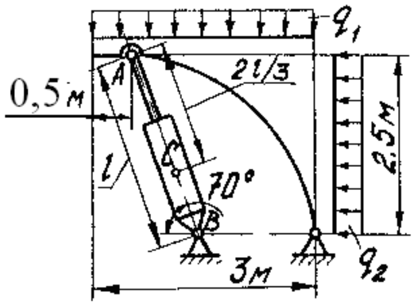
К зданию 10.11

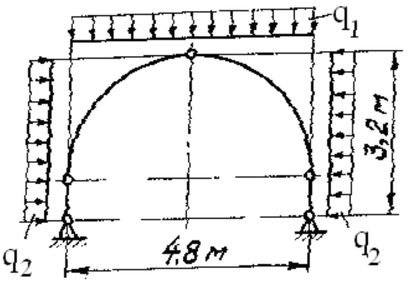
Задача 10.12. Найти продольное усилие *S* в стойке *AB* призабойной крепи под действием сил горного давления $q_1 = 40$ кН/м и $q_2 = 20$ кН/м с учетом веса стойки $G = 6$ кН, приложенного в точке *C*.

Ответ: $S = 163{,}76$ кН

Задача 10.13. Арочная крепь находится под действием вертикального горного давления $q_1 = 80$ кН/м. Определить интенсивность q_2 отпора боковых горных пород.

Ответ: $q_2 = 60$ кН/м





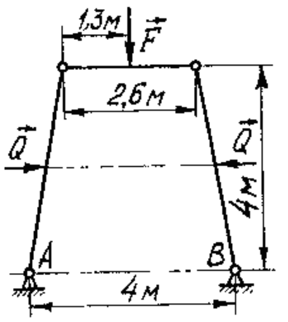
К задаче 10.12 К задаче 10.13

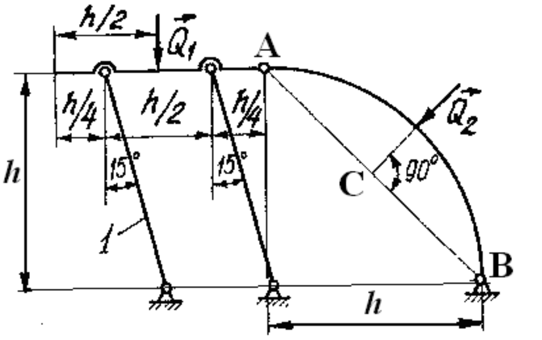
Задача 10.14. Определить реакции в шарнирах A и B трапециевидной крепи под действием сил горного давления F = 200 кН и Q = 160 кН.

Ответ: $X_A = -X_B = -62{,}5$кН; $Y_A = Y_B = 100$ кН.

Задача 10.15. Определить усилие S_1 в передней стойке 1 призабойной крепи под действием сил горного давления Q_1 = 150 кН и Q_2 = 80 кН; $l_{AC}=0{,}5\ l_{AB}$.

Ответ: S_1 = 9,23 кН





К задаче 10.14 К задаче 10.15

Задача 10.16. Два груза, массы которых $m_1 = m_3$ = 2 кг, соединены между собой нитью, переброшенной через блок 2, массой которого можно пренебречь. Определите ускорение грузов, если коэффициент трения скольжения между грузом 1 и плоскостью f = 0,1.

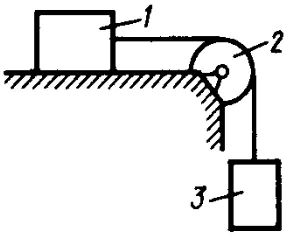
Ответ: a = 4,41м/с^2

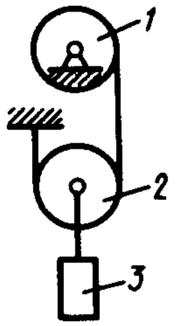
Задача 10.17. Тела 1 и 2 - однородные диски, массы и радиусы которых одинаковы. Определите ускорение тела 3, если его масса $m_3=m_2=m_1$.

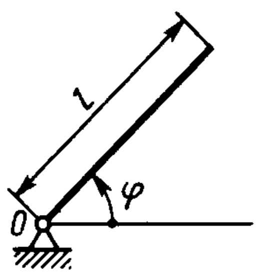
Ответ: a_3 = 4,36 м/с^2

Задача 10.18. Однородный стержень длиной l = 3 м и массой m = 30 кг вращается в вертикальной плоскости. Определите обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате φ, в момент времени, когда угол φ = 45°.

Ответ: Q = -312 кН







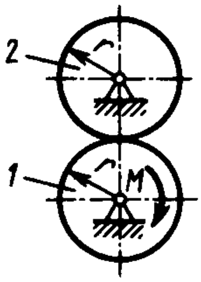
К заданию 10.16 К заданию 10.17 К заданию 10.18

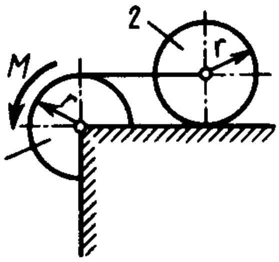
Задача 10.19. Определите угловое ускорение диска I, если на него действует пара сил с моментом M = 0,4 Нм. Массы и радиусы однородных дисков 1 и 2 одинаковы: m = 10 кг, r = 0,2м.

Ответ: $\varepsilon = 1 c^{-2}$

Задача 10.20. Определите угловое ускорение катка 2, катящегося без скольжения, если на блок 1 действует пара сил с моментом M = 0,6 Нм. Каток 2 считать однородным цилиндром массой m = 4 кг и радиусом r = 0,5 м.

Ответ: $\varepsilon_2 = 0{,}4\ c^{-2}$





К заданию 10.19 К заданию 10.20

Задача 10.21. Механическая система состоит из ступенчатых шкивов 1 и 2 с радиусами ступеней $R_1 = R$, $r_1 = 0{,}4R$; $R_2 = R$, $r_2 = 0{,}8R$ (массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу); грузов 3, 4 и сплошного однородного цилиндрического катка 5. Вес каждого тела соответственно указан в табл. 9 (столбцы 2–6). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. Грузы скользят по плоскостям без трения, а катки катятся без скольжения. Кроме сил тяжести, на одно из тел системы действует постоянная сила F, а на шкивы 1 и 2 при их вращении – постоянные моменты сил сопротивления, равные, соответственно M_1 и M_2, величины которых также приведены в таблице (столбцы 7–9).

Требуется составить для данной системы уравнение Лагранжа и определить из него величину, указанную в столбце 10 таблицы, где ε_1, ε_2 – угловые ускорения шкивов 1 и 2, a_3, a_4, a_{C5} – ускорения грузов 3, 4 и центра масс катка 5 соответственно. Когда в задаче надо определить ε_1 или ε_2 , принимают R = 0,25 м. Тот из грузов 3, 4, вес которого равен нулю, на чертеже не изображать. Шкивы 1 и 2 всегда входят в систему.

Т а б л и ц а 9

Номер варианта	Вес тела, Н					Момент сопротивления, Нм		Сила F, Н	Найти
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	M_1	M_2		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	120	0	10	0	30	2R	0	80	a_3
2	0	100	0	40	20	0	3R	60	ε_2
3	100	0	0	20	10	3R	0	40	ε_1
4	0	120	20	0	30	0	2R	100	a_3
5	80	100	0	0	20	0	3R	50	a_{C5}
6	130	0	20	0	10	0	4R	80	ε_1
7	0	120	0	30	40	2R	0	60	a_4
8	100	80	0	0	20	3R	0	50	ε_2
9	120	0	0	50	40	0	2R	60	a_4
10	0	120	20	0	30	2R	0	100	a_{C5}

Указания. Механическая система имеет одну степень свободы, следовательно, ее положение определяется одной обобщенной координатой и для нее должно быть составлено одно уравнение.

За обобщенную координату q принимают:

перемещение x соответствующего груза или центра масс катка 5 (в задачах, где требуется определить a_3 , a_4 или a_{C5});

угол поворота φ соответствующего шкива (в задачах, где требуется определить ε_1 или ε_2).

Для составления уравнения необходимо вычислить сначала кинетическую энергию системы T и выразить все вошедшие в T скорости через обобщенную скорость, т.е. через $\dot{x}$, если обобщенная координата x, или через $\dot{\varphi}$, если обобщенная координата φ. Затем вычислить обобщенную силу Q. Для этого надо сообщить системе возможное перемещение, при котором выбранная координата, т.е. x (или φ), получает положительное приращение δx (или $\delta\varphi$), и вычислить сумму элементарных работ всех сил на этом перемещении; в полученном равенстве надо все другие элементарные перемещения выразить через δx (или $\delta\varphi$) и вынести δx (или $\delta\varphi$) за скобки. Коэффициент при δx (или $\delta\varphi$) и будет обобщенной силой Q.

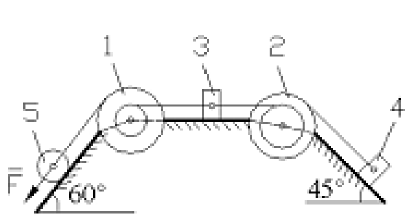


Рис. 21.1

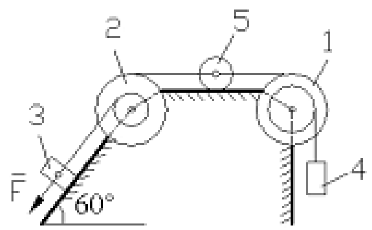


Рис. 21.2

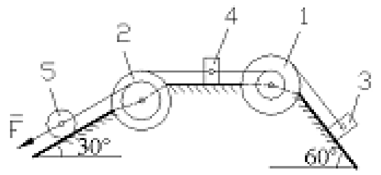


Рис. 21.3

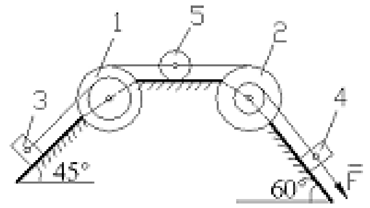


Рис. 21.4

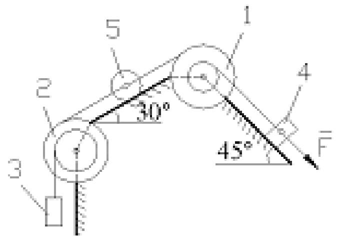


Рис. 21.5

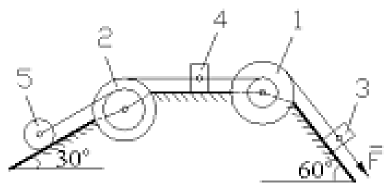


Рис. 21.6

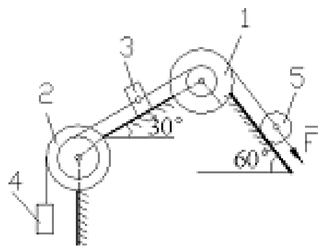


Рис. 21.7

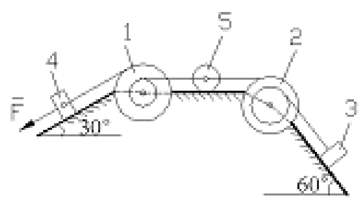


Рис. 21.8

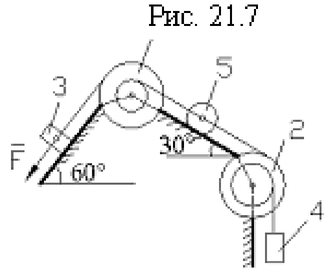


Рис. 21.9

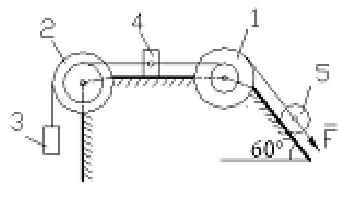


Рис. 21.10

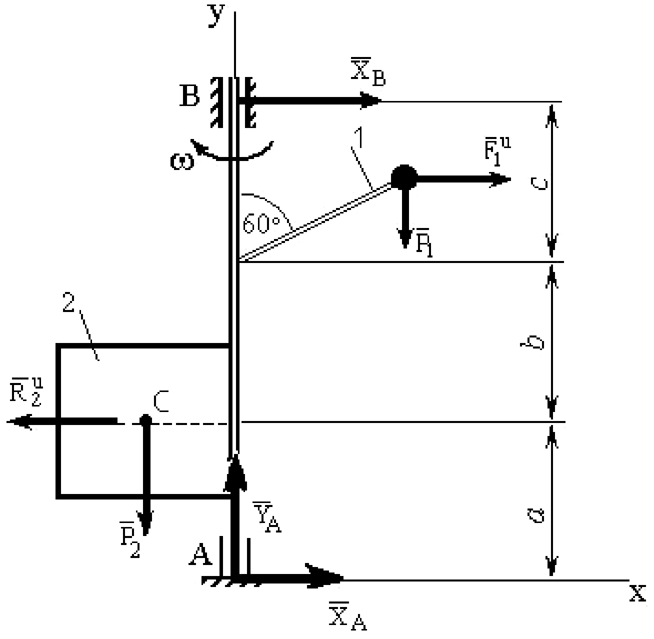
К задаче 10.21

Задача 10.22. Решить задачу 10.21, применяя общее уравнение динамики.

Примеры решения задач.

Задача 1. К невесомому валу *AB*, закрепленному в точке *A* подпятником и в точке *B* – подшипником и вращающемуся с постоянной угловой скоростью $\omega = 4$ с$^{-1}$, жестко прикреплены невесомый стержень 1 длиной $L_1 = 0{,}4$ м, имеющий на конце груз массой $m_1 = 2$ кг, и тело

2 в виде сплошной однородной квадратной пластины со стороной L_2 = 0,6 м и массой m_2= 8 кг. Определить реакции подпятника А и подшипника В. При расчетах принять $a = b = c$ = 0,5 м.



К задаче 1

Решение. Для определения искомых реакций рассмотрим движение механической системы, состоящей из вала *AB*, пластины и груза, и применим принцип Даламбера. Проведём вращающиеся вместе с валом оси *xAy* так, чтобы стержень и пластина лежали в плоскости *xy*, и покажем действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ составляющие реакции подпятника $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и реакцию подшипника $\overline{X}_B$.

Согласно принципу Даламбера покажем на рисунке силу инерции груза $\overline{F}_1^u$, считая груз материальной точкой, и главный вектор сил инерции пластины $\overline{R}_2^u$. Так как вал вращается равномерно (ω = const), то элементы пластины имеют только нормальные ускорения, направленные к оси вращения. Тогда силы инерции будут направлены от оси вращения.

Величина главного вектора сил инерции пластины $R_2^u = m_2 \cdot a_C$, где a_C – ускорение центра масс пластины, при этом $a_C = \omega^2 \dfrac{L_2}{2}$.

В результате $R_2^u = m_2 \omega^2 \dfrac{L_2}{2} = 8 \cdot 4^2 \dfrac{0,6}{2}$ = 38,4 Н.

Аналогично для силы инерции F_1^u груза

$F_1^u = m_1 \cdot \omega^2 \cdot L_1 \cdot \sin 60° = 2 \cdot 42 \cdot 0,4 \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ = 11,1 Н.

Так как все действующие силы и силы инерции лежат в плоскости *xy*, то и реакции подпятника *A* и подшипника *B* тоже лежат в этой плоскости, что было учтено при их изображении.

По принципу Даламбера действующие на тела системы внешние силы и приложенные силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составляя для этой плоской системы произвольно расположенных сил уравнения равновесия, получим

$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A + X_B - R_2^u + F_1^u = 0;$

$\sum F_{ky} = 0$; $Y_A - P_1 - P_2 = 0$;

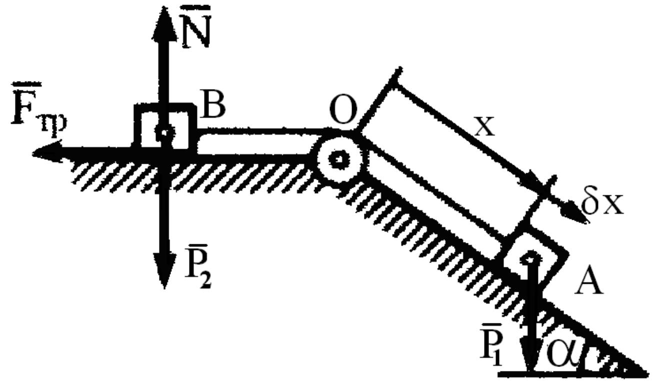
$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0; - X_B(a+b+c) - P_1 L_1 \sin 60^o + P_2 \dfrac{L_2}{2} + R_2^u a - F_1^u(a+b+L_1 \cos 60^o) = 0$.

Подставив в эти уравнения числовые значения всех заданных по условию задачи и вычисленных величин и решив эту систему уравнений, найдём искомые реакции.

О т в е т: X_A = 4,7 Н; Y_A = 98,1 Н;, X_B = 22,6 Н.

Задача 2. Вычислим обобщенную силу для системы, где груз *A* весом P_1 перемещается по гладкой наклонной плоскости, а груз *B* весом P_2 — по шероховатой горизонтальной плоскости, коэффициент трения о которую равен *f*. Грузы связаны нитью, перекинутой через блок *O*. Массой нити и блока пренебрегаем.

Решение. Система имеет одну степень свободы и ее положение определяется координатой $q_1 = x$ (положительное направление отсчета *x* показано стрелкой).



К задаче 2

Для определения Q_1 сообщаем системе возможное перемещение δ*x*, при котором δ*x* > 0, и вычисляем на этом перемещении элементарные работы сил $\overline{P}_1$ и $\overline{F}_{тр}$; остальные силы работы не совершают. Так как $F_{mp} = fN = fP_2$, то

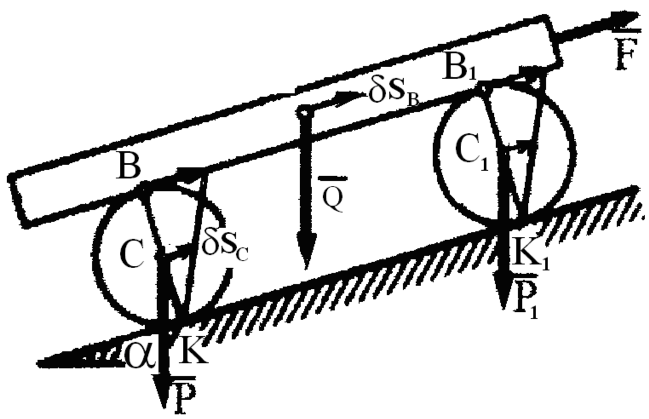
$\delta A = (P_1 \sin\alpha - fP_2)\delta x$

Следовательно,

$Q_1 = P_1 \sin\alpha - fP_2$.

Ответ:. $Q_1 = P_1 \sin\alpha - fP_2$

Задача 3. Вес бревна *Q*, вес каждого из двух цилиндрических катков, на которые оно положено, *P*. Определить, какую силу $\overline{F}$ надо приложить к бревну, чтобы удержать его в равновесии на наклонной плоскости при данном угле наклона α. Трение катков о плоскость и бревно обеспечивает отсутствие скольжения.



К задаче 3

Решение. Если пренебречь сопротивлением качению, то плоскость для катков будет идеальной связью. При качении без скольжения у системы одна степень свободы. Сообщая системе возможное перемещение, получаем

$F\,\delta s_B - Q\sin\alpha\cdot\delta s_B - 2P\sin\alpha\cdot\delta s_C = 0,$

где δs_B — возможное перемещение бревна, совпадающее с перемещением точки B.

Точка касания K является мгновенным центром скоростей катка. Следовательно,

$v_B = 2v_C$ и $\delta s_B = 2\delta s_C$,

если считать

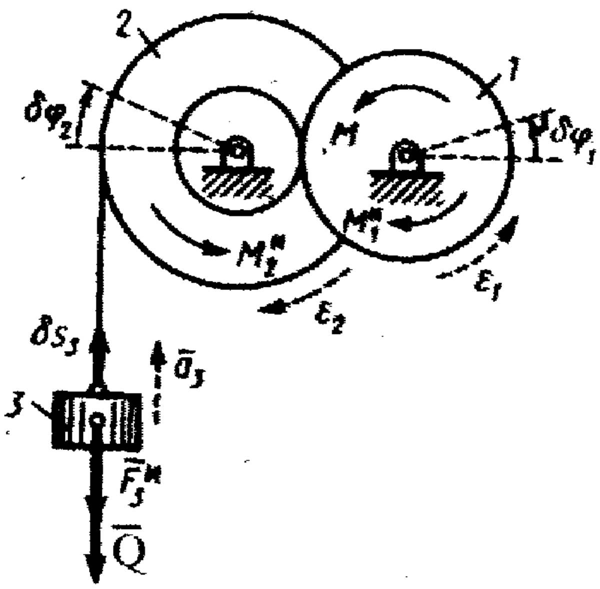
$\delta s_B = v_B dt$, $\delta s_C = v_C dt$.

Подставляя это значение δs_B в предыдущее уравнение, найдем окончательно

$F = (Q + P)\sin\alpha.$

Ответ: $F = (Q + P)\sin\alpha$.

Задача 4. В подъемнике, к шестерне 1, имеющей вес P_1 и радиус инерции относительно ее оси ρ_1, приложен вращающий момент M. Определить ускорение поднимаемого груза 3 весом Q, пренебрегая весом веревки и трением в осях. Барабан, на который наматывается веревка, Жестко скреплен с другой шестерней; их общий вес равен P_2, а радиус инерции относительно оси вращения ρ_2. Радиусы шестерен равны соответственно r_1 и r_2, а радиус барабана r.



К задаче 4

Решение. Изображаем действующую на систему активную силу $\overline{Q}$ и вращающий момент M (силы P_1 и P_2 работы не совершают); присоединяем к ним силу инерции груза $\overline{F}_3^u$ и пары с моментами $\overline{M}_1^u$ и $\overline{M}_2^u$, к которым приводятся силы инерции вращающихся тел. Эти величины по модулю равны:

$$F_3^u = (Q/g)\,a_3;\quad |M_1^u| = (P_1/g)\,\rho_1^2\,\varepsilon_1;\quad |M_2^u| = (P_2/g)\,\rho_2^2\,\varepsilon_2.$$

Направления всех величин показаны на чертеже. Сообщая системе возможное перемещение и составляем общее уравнение динамики

$$-(q + F_3^u)\,\delta s_3 + (M - M_1^u)\delta\varphi_1 - M_2^u\,\delta\varphi_2 = 0.$$

Выражая все перемещения через $\delta\varphi_2$, найдем, что

$$\delta s_3 = r\delta\varphi_2, \qquad \frac{\delta\varphi_1}{\delta\varphi_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_1}{r_2} \qquad \text{и} \qquad \delta\varphi_1 = \frac{r_1}{r_2}\delta\varphi_2.$$

Окончательно уравнение движения примет вид

$$Q\left(1+\frac{a_3}{g}\right)r + \frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2 + \frac{P_1}{g}\rho_1^2\varepsilon_1\frac{r_2}{r_1} - M\frac{r_2}{r_1} = 0.$$

Входящие сюда величины ε_1 и ε_2 выразим через искомое ускорение a_3. Учитывая, что ε_1, ε_2 связаны между собой так же, как и ω_1, ω_2 получим:

$$\varepsilon_2 = a_3/r; \;\; \varepsilon_1 = r_2\varepsilon_2/r_1 = r_2\, a_3/r\, r_1.$$

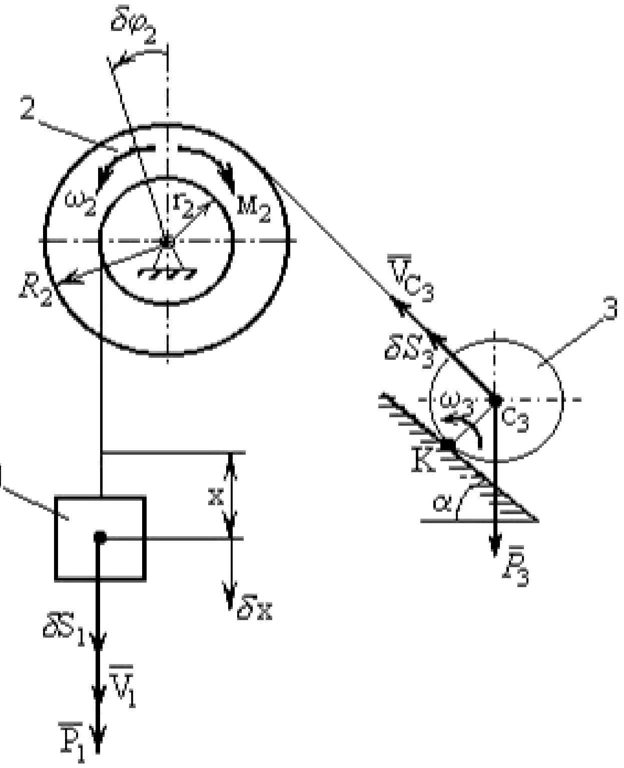
В результате найдем окончательно

$$a_3 = \frac{(rr_2/r_1)M - r^2Q}{r^2Q + \rho_2^2P_2 + (\rho_1^2r_2^2/r_1^2)P_1}g.$$

Эту задачу можно было бы решить и с помощью теоремы об изменении кинетической энергии.

Ответ: $a_3 = \dfrac{(rr_2/r_1)M - r^2Q}{r^2Q + \rho_2^2P_2 + (\rho_1^2r_2^2/r_1^2)P_1}g.$

Задача 5. Механическая система состоит из ступенчатого шкива 2 (радиусы ступеней $R_2 = R$ и $r_2 = 0{,}5R$), груза 1 и сплошного катка 3, прикрепленных к концам нитей, намотанных на ступени шкива На шкив при его вращении действует момент сил сопротивления $M_2 = 0{,}2PR$. Массу шкива следует считать равномерно распределенной по внешнему ободу. Определить a_1 – ускорение груза 1. При вычислениях принять $P_1 = 8P$; $P_2 = 4P$; $P_3 = 6P$; $\alpha = 30°$.



К задаче 5

Решение. Система имеет одну степень свободы. Выберем в качестве обобщенной координаты перемещение x груза 1 (q = x), полагая, что груз движется вниз, и, отсчитывая x в сторону движения, составим уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q \qquad (1)$$

Определим кинетическую энергию T системы, равную сумме энергий всех тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 . \qquad (2)$$

Так как груз 1 движется поступательно, шкив 2 вращается вокруг неподвижной оси, а каток 3 движется плоскопараллельно, то

$$T_1=\frac{P_1}{2g}V_1^2; \qquad T_2=\frac{I_2\omega_2^2}{2}; \qquad T_3=\frac{P_3}{2g}V_{C_3}^2+\frac{I_{C_3}\omega_3^2}{2} \qquad (3)$$

поскольку масса шкива считается распределенной по внешнему ободу, а каток – сплошной (его радиус обозначим r_3), моменты инерции тел 2 и 3 равны:

$$\mathrm{I}_2=\frac{\mathrm{P}_2}{4\mathrm{g}}\mathrm{R}^2; \qquad \mathrm{I}_{\mathrm{C}_3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{P}_3}{\mathrm{g}}\mathrm{r}_3^2 \qquad (4)$$

Все скорости, входящие в выражения T_1, T_2 и T_3 , выразим через обобщенную скорость $\dot{x}$, равную V_1. Если учесть, что $V_1 = \omega_2 r_2$, а $V_{C_3} = \omega_2 R_2$ и что точка К является для катка 3 мгновенным центром скоростей, то получим

$$V_1=\dot{x}; \ \omega_2=\frac{V_1}{0{,}5R}=\frac{\dot{x}}{0{,}5R}; \ V_{C_3}=\omega_2 R_2=\frac{\dot{x}}{0{,}5}; \ \omega_3=\frac{V_{C_3}}{KC_3}=\frac{V_{C_3}}{r_3}=\frac{\dot{x}}{0{,}5r_3} \qquad (5)$$

Подставляя величины (5) и (4) в равенства (3), а затем значения T_1, T_2 , T_3 в равенство (2), найдём окончательно, что

$$T=\frac{1}{2g}\left(P_1+4P_2+6P_3\right)\dot{x}^2 \ T=\frac{30P}{g}\dot{x}^2. \qquad (6)$$

Так как здесь T зависит только от $\dot{x}$, то

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{\mathrm{x}}}=60\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{g}}\dot{\mathrm{x}}, \qquad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}}=0 \quad \text{è} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{\mathrm{x}}}\right)=60\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{g}}\ddot{\mathrm{x}}. \qquad (7)$$

Найдём обобщенную силу Q. Для этого изобразим силы, совершающие при движении системы работу, т.е. силы P_1, P_2 и момент сил сопротивления M_2, направленный против вращения шкива. Затем сообщим системе возможное (элементарное) перемещение, при котором обобщенная координата x получает положительное приращение δx, и покажем перемещения каждого из тел; для груза 1 это будет $\delta S_1 = \delta x$, для шкива 2 – поворот на угол $\delta\varphi_2$, для катка 3 – перемещение δS_3 его центра. После этого вычислим сумму элементарных работ сил и момента на данных перемещениях.

Получим

$$\Sigma\delta A_k = P_1\cdot\delta S_1 - M_2\cdot\delta\varphi_2 - P_3\cdot\sin\alpha\cdot\delta S_3 . \qquad (8)$$

Выразим все возможные перемещения через δx. Учтя, что зависимости между элементарными перемещениями здесь аналогичны зависимостям (5) между соответствующими скоростями, получим

$$\delta S_1 = \delta x; \qquad \delta\varphi_2=\frac{\delta x}{0{,}5R}; \qquad \delta S_3 = R_2\cdot\delta\varphi_2=\frac{\delta x}{0{,}5}. \qquad (9)$$

Подставляя эти значения в равенство (8) и вынося δx за скобки, найдём, что

$$\Sigma\delta A_k=\left(P_1-\frac{2M_2}{R}-2P_3\sin\alpha\right)\delta x. \qquad (10)$$

Коэффициент при δx в полученном выражении и будет обобщенной силой Q.

Следовательно,

$$Q=\left(P_1-\frac{2M_2}{R}-2P_3\sin\alpha\right) \quad \text{или} \quad Q = 1{,}6P. \qquad (11)$$

Подставляя найденные величины (7) и (11) в уравнение (1), получим

$$60\frac{P}{g}\ddot{x} = 1{,}6P.$$

Отсюда находим искомое ускорение $a_1 = \ddot{x}$.

Ответ: $a_1 = 0{,}027g$.

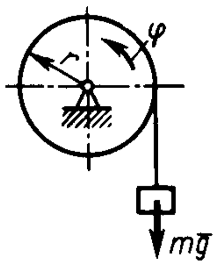
Примечание. Если в ответе получится $a < 0$ (или $\varepsilon < 0$), то это означает, что система движется не в ту сторону, куда было предположено при решении задачи. Тогда направление момента M против вращения шкива изменится. В этом случае необходимо еще раз составить уравнения (8), (11) и заново определить величину Q.

Вопросы и задания для самоконтроля

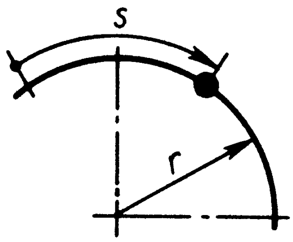
1. Груз массой m = 60 кг подвешен на нити, которая наматывается на барабан, вращающийся согласно уравнению φ = 0,6t2. Определите натяжение каната, если радиус r = 0,4 м. (Ответ: Т = 617 Н)

2. Материальная точка массой m = 10 кг движется по окружности радиуса r = 3 м согласно закону движения $s = 4t^3$. Определите модуль силы инерции материальной точки в момент времени t = 1 с. (Ответ: $F^{и}$ = 37 Н)

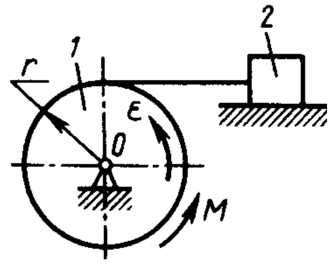
3. Барабан 1 радиуса r = 20 см под действием пары сил с моментом М вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 2$ $с^{-2}$. Определите модуль реакции в шарнире O, если коэффициент трения скольжения тела 2 по плоскости f = 0,1, а масса груза 2 равна 4 кг. Массой барабана пренебречь. (Ответ: R_o = 5,25Н)



К заданию 1.



К заданию 2

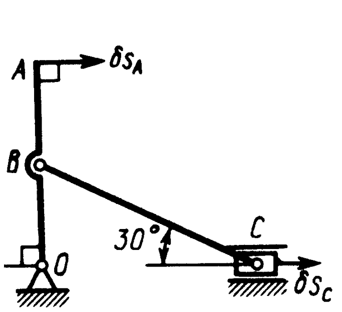


К заданию 3

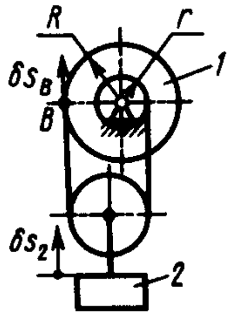
4. Определите отношение между возможными перемещениями δs_A точки A кривошипа OA и δs_C точки C ползуна, если длины $OB = AB$. (Ответ: 2)

5. Определите отношение между возможными перемещениями δs_2 точки B барабана 1 и δs_2 груза 2 дифференциального ворота, если радиусы $R = 2r$ = 20 см. (Ответ: 4)

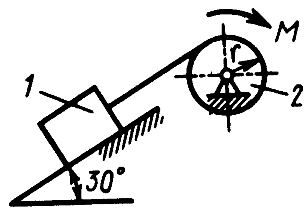
6. Определите момент M пары сил, который необходимо приложить к барабану 2 радиуса r = 20 см для равномерного подъема груза 1 весом 200 Н. (Ответ: M = 20 Нм)



К заданию 4.



К заданию 5

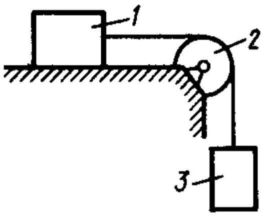


К заданию 6

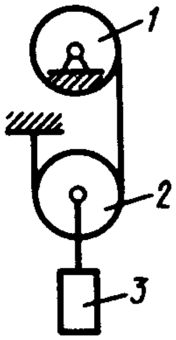
7. Два груза, массы которых $m_1 = m_3$ = 2 кг, соединены между собой нитью, переброшенной через блок 2, массой которого можно пренебречь. Определите ускорение грузов, если коэффициент трения скольжения между грузом 1 и плоскостью f = 0,1. (Ответ: a = 4,41 м/с^2)

8. Тела 1 и 2 - однородные диски, массы и радиусы которых одинаковы. Определите ускорение тела 3, если его масса $m_3 = m_2 = m_1$. (Ответ: a = 4,36 м/с^2)

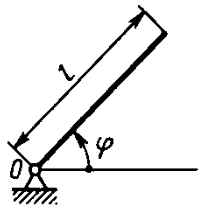
9. Однородный стержень длиной l = 3 м и массой m = 30 кг вращается в вертикальной плоскости. Определите обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате φ, в момент времени, когда угол φ = 45°. (Ответ: Q = -312 Н)



К заданию 7.



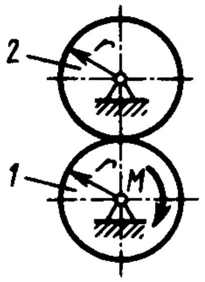
К заданию 8



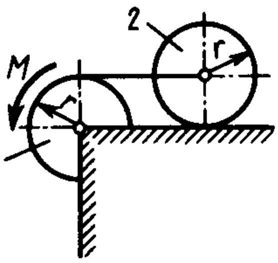
К заданию 9

10. Определите угловое ускорение диска I, если на него действует пара сил с моментом M = 0,4 Н · м. Массы и радиусы однородных дисков 1 и 2 одинаковы: m = 10 кг, r = 0,2м. (Ответ: ε = 1 с$^{-2}$)

11.Определите угловое ускорение катка 2, катящегося без скольжения, если на блок 1 действует пара сил с моментом M = 0,6 Н · м. Каток 2 считать однородным цилиндром массой m = 4 кг и радиусом r = 0,5 м. (Ответ: ε = 0,4 с$^{-2}$)



К заданию 10.



К заданию 11