**Негосударственное частное образовательное учреждение
высшего образования
«Технический университет УГМК»**

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ОРГАНИЗАЦИИ И ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ДИСЦИПЛИНЕ
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Специальность **21.05.04 Горное дело**

Специализация **Подземная разработка рудных месторождений**

Уровень высшего образования **Специалитет**
(бакалавриат, специалитет, магистратура)

Автор-разработчик: Петрова С.Н., канд. пед. наук, доцент
Рассмотрено на заседании кафедры механики и автоматизации технологических процессов и производств
Одобрено Методическим советом университета 30 июня 2021 г., протокол № 4

г. Верхняя Пышма
2021

Методические рекомендации к организации и выполнению самостоятельной работы составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины.

Самостоятельная работа обучающихся включает выполнение расчетной работы, изучение теоретического курса и подготовку к экзамену. Самостоятельная работа обучающихся также включает все виды текущего контроля.

Контроль результатов самостоятельной работы проводится путем опроса на аудиторных занятиях.

Примерная тематика самостоятельной работы студентов

Код раздела, темы	Наименование работы
1	Статика
2	Кинематика
3	Динамика

Примерная тематика расчетной работы

Код раздела, темы	Наименование работы
1	Условия равновесия произвольной плоской системы сил
2	Кинематика точки
3	Сложное движение точки
4	Динамика точки
5	Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

<u>Расчетная работа № 1</u>

Тема: Условия равновесия произвольной плоской системы сил

Тип задания – расчетная работа.

Задача С1. Жесткая рама закреплена в точке а шарнирно, а в точке в прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами или к шарнирной опоре на катках (рис. С1.1–С1.10). В точке C к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом P = 25 кН. На раму действуют пара сил с моментом M = 60 кНм и две силы, величины направления и точки приложения которых указаны в табл. С1. В последнем столбце табл. С1 указан участок, на котором действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности q. Направление действия распределенной нагрузки на горизонтальном участке – вниз, на вертикальном – влево.

Определить реакции связей в точках A и B, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять a = 0,5 м.

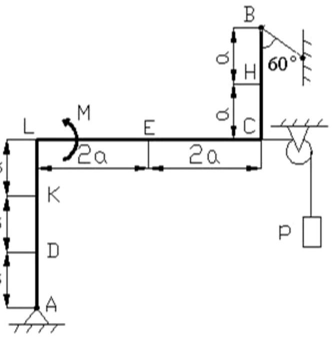


Рис. С1.1

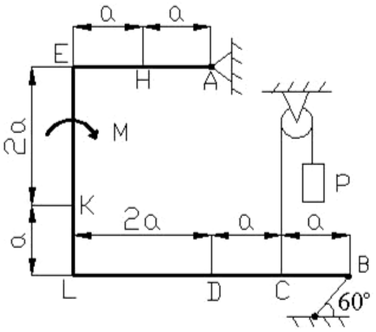


Рис. С1.2

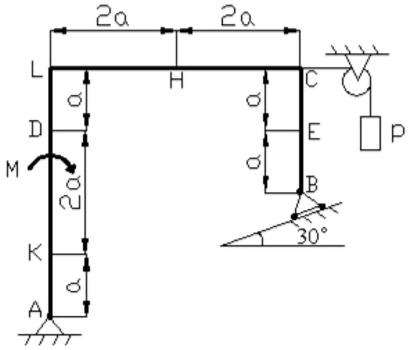


Рис. С1.3

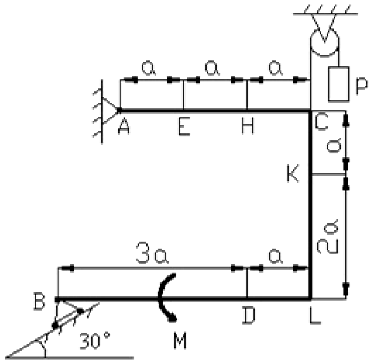


Рис. С1.4

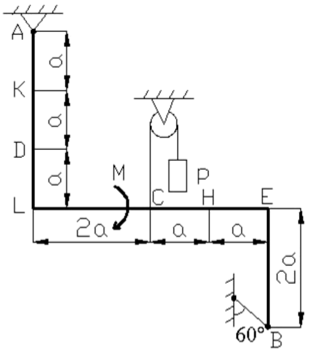


Рис. С1.5

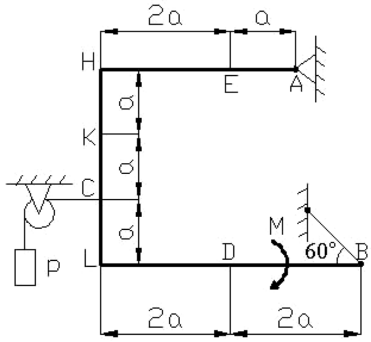


Рис. С1.6

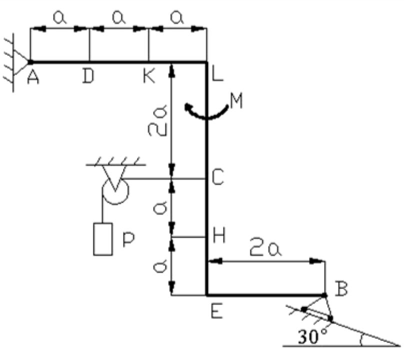


Рис. С1.7

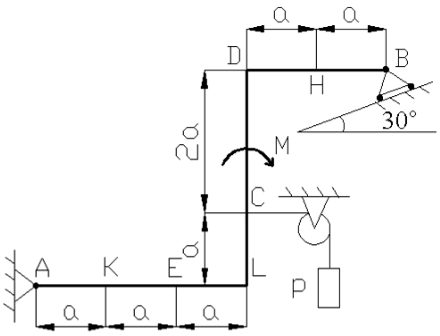


Рис. С1.8

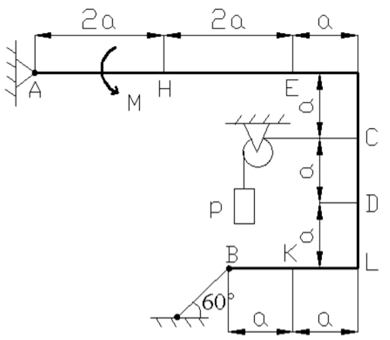


Рис. С1.9

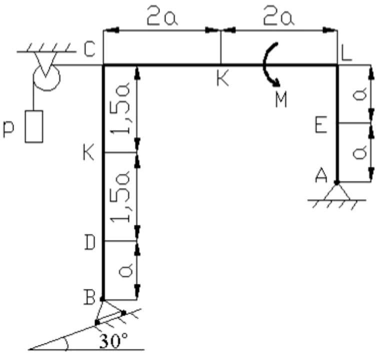
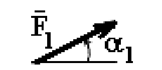
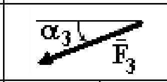
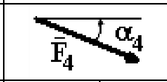
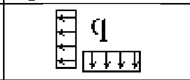


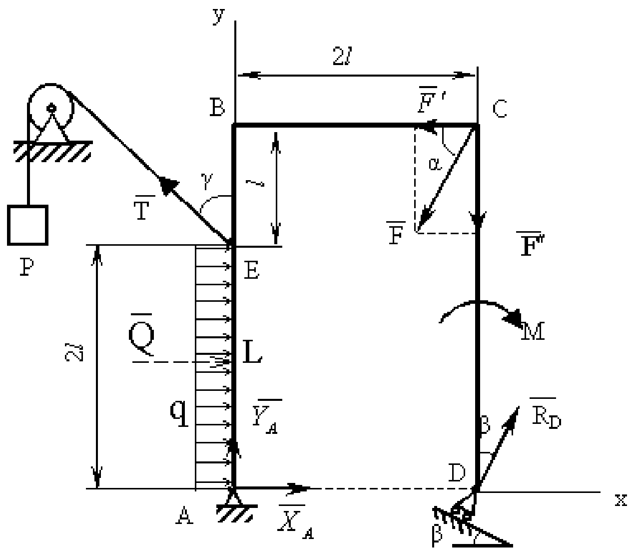
Рис. С1.10

Таблица С1

Номер Варианта	Силы								Распределенная нагрузка q = 10 кН/м
	F_1 = 10 кН		F_2= 20 кН		F_3 = 30 кН		F_4 = 40 кН		
									
	Точка приложения	α_1	Точка приложения	α_2	Точка приложения	α_3	Точка приложения	α_4	Участок приложения q
1	H	30	–	–	–	–	K	60	KL
2	–	–	D	45	E	60	–	–	LC
3	K	45	–	–	–	–	E	30	KL
4	–	–	K	60	H	30	–	–	LC
5	D	30	–	–	–	–	E	60	KL
6	–	–	H	30	–	–	D	45	LC
7	E	60	–	–	K	45	–	–	KL
8	–	–	D	60	–	–	H	45	LC
9	H	60	–	–	D	30	–	–	KL
10	–	–	E	45	K	30	–	–	LC

Указания. При решении задачи С1 следует учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, будут одинаковыми, когда трением пренебрегают. Уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если составлять уравнение моментов относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента вектора силы $\bar{F}$ часто удобно разложить ее на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона, тогда $m_0(\bar{F}) = m_0(\bar{F}') + m_0(\bar{F}'')$.

Пример решения задачи С1. Жесткая рама *ABCD* (рис. С1) имеет в точке *A* неподвижную шарнирную опору и в точке *D* – подвижную шарнирную опору (на катках). Действующие нагрузки и размеры показаны на рис. С1. В точке *E* к раме прикреплен трос с подвешенным грузом, вес которого *P*. На раму действуют сила *F*, пара сил с моментом *M* и равномерно распределенная нагрузка интенсивности *q*.



К задаче С1

Решение. Рассмотрим равновесие рамы. Проведем координатные оси xy и покажем действующие на раму нагрузки: силу $\overline{F}$, пару сил с моментом M, натяжение троса $\overline{T}$ (по модулю $T = P$) и реакции связей $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{R}_D$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры А изображаем двумя её составляющими, реакция шарнирной опоры D на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости). Равномерно распределенную нагрузку заменим равнодействующей сосредоточенной силой $Q = q{\cdot}2l = 10{\cdot}2{\cdot}0{,}5 = 10$ кН, вектор которой приложен к середине отрезка AE (точка L) и направлен в сторону действия нагрузки.

Для полученной плоской системы произвольных сил составим уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\overline{F}$ относительно точки A разложим её на составляющие $F' = F\cos\alpha$ и $F'' = F\sin\alpha$:

$\sum F_{kx} = 0, \qquad X_A + R_D \sin\beta - F\cos\alpha - T\sin\gamma + Q = 0;$

$\sum F_{ky} = 0, \qquad Y_A + R_D \cos\beta - F\sin\alpha + T\cos\gamma = 0;$

$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0, \quad -M + R_D\cos\beta\, 2l + F\cos\alpha\, 3l - F\sin\alpha\, 2l +$

$+ T\sin\gamma\, 2l - Ql = 0.$

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив затем эти уравнения, найдём искомые реакции связей: $X_A = 4{,}89$ кН; $Y_A = -22{,}5$ кН; $R_D = 35{,}57$ кН.

Выполним проверку правильности решения задачи. Составим уравнение моментов относительно точки D:

$\sum m_D(\overline{F}_k) = 0, \; -M + F\cos\alpha\, 3l - T\cos\gamma\, 2l + T\sin\gamma\, 2l - Ql - Y_A\, 2l =$

$= -40 + 30\cdot 0{,}5\cdot 3\cdot 0{,}5 - 25\cdot 0{,}707\cdot 2\cdot 0{,}5 +$

$+ 25\cdot 0{,}707\cdot 2\cdot 0{,}5 - 10\cdot 0{,}5 - (-22{,}5)2\cdot 0{,}5 = 0.$

Полученный результат говорит о том, что задача решена верно.

Ответ: $X_A = 4{,}89$ кН;

$Y_A = -22{,}5$ кН;

$R_D = 35{,}57$ кН.

Знак «минус» перед величиной Y_A означает, что эта сила имеет направление, обратное указанному на рис. С1.

Расчетная работа № 2

Тема: Кинематика точки

Тип задания – расчетная работа.

Задача К1. Движение точки в плоскости *xy* задано уравнениями $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где *x* и *y* – в метрах, t – в секундах (табл. К1, К1а). Найти и изобразить траекторию точки (линию, которую точка описывает при своем движении, считая, что движение начинается в момент времени t = 0). Определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения в момент времени t = 1 с и радиус кривизны в соответствующей точке в этот же момент времени.

Указания. Задача К1 решается с помощью формул, по которым определяется скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются касательное и нормальное ускорения точки.

В данной задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени t = 1с. В некоторых вариантах задачи при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть знакомые из тригонометрии формулы:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1;$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Таблица К1

Последняя цифра варианта	Уравнение движения точки $x = f_1(t)$	Примечания
1 2 3	$4\cos(\pi t/6)$ $2 - 4\cos(\pi t/6)$ $2\cos(\pi t/6) - 3$	$y = f_2(t)$ для вариантов от 00 до 29 (две последние цифры варианта) взять из столбца 2 табл. К1а
4 5 6 7	$4 - 2t$ $2 - t$ $2t$ $t - 4$	$y = f_2(t)$ для вариантов от 30 до 69 (две последние цифры варианта) взять из столбца 3 табл. К1а
8 9 0	$8\sin(\pi t/6) - 2$ $2\sin(\pi t/6)$ $2 - 4\sin(\pi t/6)$	$y = f_2(t)$ для вариантов от от 70 до 99 (две последние цифры варианта) взять из столбца 4 табл. К1а

Таблица К1а

Последняя цифра варианта	Уравнение движения точки $y = f_2(t)$		
	Для вариантов от 00 до 29	Для вариантов от 30 до 69	Для вариантов от 70 до 99
1	2	3	4
1	$12\sin(\pi t/6)$	$2t^2 + 2$	$4\cos(\pi t/6) - 2$
2	$4 - 6\cos(\pi t/3)$	$8\sin(\pi t/4)$	$14 - 16\cos(\pi t/6)$
3	$-3\sin^2(\pi t/6)$	$(2 + t)^2$	$4\cos(\pi t/3)$
4	$9\sin(\pi t/6) - 4$	$2t^3$	$-10\cos(\pi t/6)$
5	$4\cos(\pi t/3) - 2$	$2 + 2\cos(\pi t/4)$	$-4\cos(\pi t/6)$
6	$-10\sin(\pi t/6)$	$2 - 3t^2$	$8 - 12\cos(\pi t/3)$
7	$2 - 6\sin^2(\pi t/6)$	$2 - 2\sin(\pi t/4)$	$2\cos(\pi t/6)$
8	$2\sin(\pi t/6) - 2$	$(t + 1)^3$	$2 - 8\cos(\pi t/3)$
9	$8\cos(\pi t/3) + 5$	$2 - t^3$	$8\cos(\pi t/6) - 4$
0	$3 - 8\sin(\pi t/6)$	$4\cos(\pi t/4)$	$-8\cos(\pi t/3)$

Пример решения задачи К1 Движение точки в плоскости xy задано уравнениями

$$x = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3;$$

$$y = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 1,$$

где *x, y* – в метрах, t – в секундах.

Найти и изобразить траекторию точки (линию, которую точка описывает при своем движении, считая, что движение начинается в момент времени t = 0). Определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения в момент времени t = 1 с и радиус кривизны в соответствующей точке в этот же момент времени. Показать векторы скорости и ускорения этой точки.

Решение. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3-x}{2}; \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{y+1}{3}.$$

возводим обе части уравнений в квадрат и складываем:

Получим

$$\frac{(3-x)^2}{2^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1.$$

Это уравнение эллипса (рис. К1). Найдем на траектории положение точки *M*, определив ее координаты при t = 1 с:

$x_{t=1c} = -1{,}59$ м;

$y_{t=1c} = 1{,}12$ м (рис. К1).

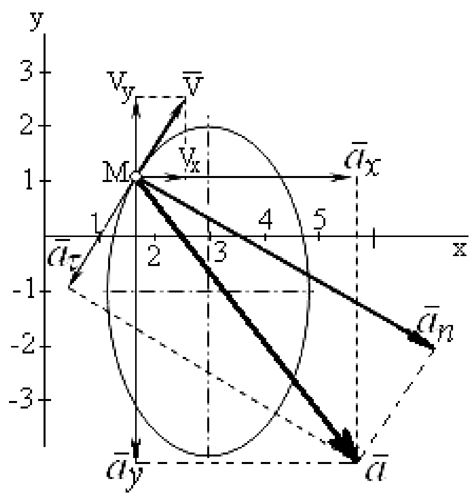


Рис. К1

Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right); \; V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{3\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right); \; V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2},$$

при t = 1 с

$V_x = 1{,}11$ м/с; $V_y = 1{,}67$ м/с;

$V = 2{,}0$ м/с.

Аналогично найдем ускорение точки и определим касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны траектории:

$$\grave{a}_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right); \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = -\frac{3\pi^2}{16}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right);$$

$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$; $a_\tau=\dfrac{a_x V_x + a_y V_y}{V}$; $a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}$; $\rho=\dfrac{V^2}{a_n}$.

При t = 1 c

$a_x = 0{,}87$ м/с^2; $a_\tau = -0{,}6$ м/с^2;

$a_y = -1{,}30$ м/с^2; $a_n = 1{,}67$ м/с^2;

$a = 1{,}57$ м/с^2; $\rho = 2{,}38$ м.

Покажем векторы скорости и ускорения для соответствующей точки М траектории (см. рис. К1).

Ответ: $V = 2{,}0$ м/с; $a = 1{,}57$ м/с^2; $a_\tau = -0{,}6$ м/с^2; $a_n = 1{,}68$ м/с^2;
$\rho = 2{,}38$ м.

Расчетная работа № 3

Тема: Сложное движение точки

Тип задания – расчетная работа.

Задача К2. Пластина вращается вокруг неподвижной оси по закону φ = φ(t), заданному в табл. К2. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой (рис. К2.1–К2.10). На рис К2.8, К2.9, К2.10 ось вращения пластины проходит через точку O_1 перпендикулярно плоскости чертежа (пластина вращается в своей плоскости). На рис. К2.1, К2.3, К2.5, К2.6 ось вращения пластины вертикальна, а на рис. К2.2 К2.4, К2.7 – горизонтальна. По пластине движется точка *M* согласно закону *s* = *OM* = s(t) (табл. К2). На всех рисунках точка *M* показана в положении, при котором *s* = *OM* положительно.

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M* в момент времени t = 1c.

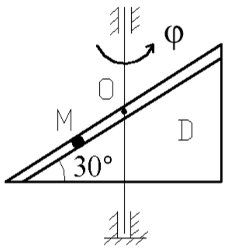


Рис. К2.1

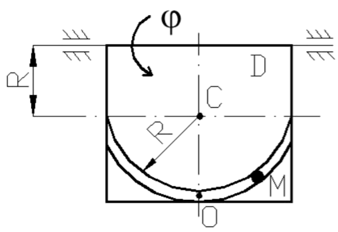


Рис. К2.2

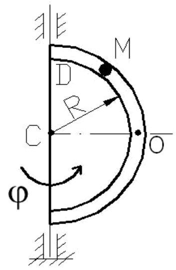


Рис. К2.3

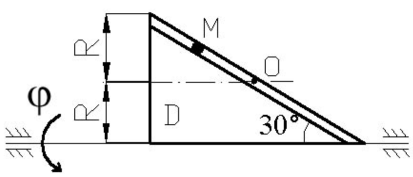


Рис. К2.4

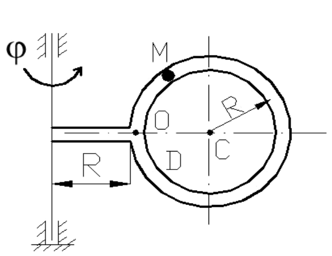


Рис. К2.5

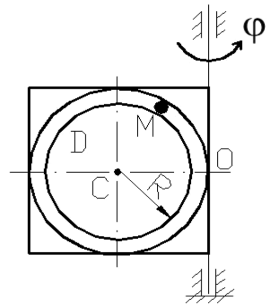


Рис. К2.6

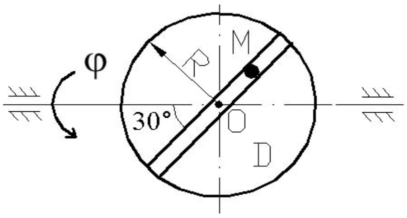


Рис. К2.7

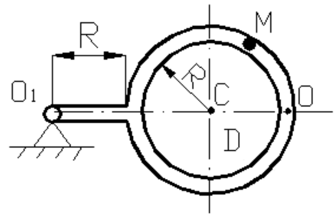


Рис. К 2.8

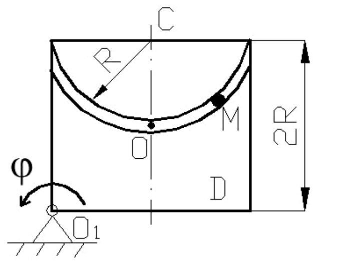


Рис. К2.9

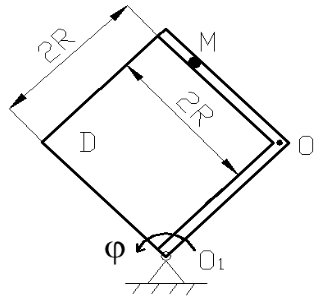


Рис. К2.10

Указания. При решении задачи К2 следует движение точки по пластине считать относительным, вращательное движение самой пластины – переносным и воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений.

Прежде всего необходимо определить, где в момент времени t = 1 с будет находиться точка *M*, и изобразить ее именно в этом положении (а не в произвольном, показанном на рисунке к задаче). В случаях, когда точка *M* движется по дуге радиуса *R*, положение точки *M* определяется углом *OCM*.

Таблица К2

Номер варианта	Закон движения пластины φ = φ (t), рад	Размер R, м	Закон движения точки s = s(t), м
1	$4(t^2 - t)$	1,2	$\frac{\pi}{6}R(4t^2 - 2t^3)$
2	$3t^2 - 8t$	1,6	$\frac{\pi}{4}R(2t^2 - t^3)$
3	$6t^3 - 12t^2$	1,0	$\frac{\pi}{3}R(2t^2 - 1)$
4	$t^2 - 2t^3$	1,6	$\frac{\pi}{3}R(2t^4 - 3t^2)$
5	$10t^2 - 5t^3$	0,8	$\frac{\pi}{6}R(3t - t^2)$
6	$2(t^2 - t)$	2,0	$\frac{\pi}{3}R(t^3 - 2t)$
7	$5t - 4t^2$	1,2	$\frac{\pi}{4}R(t^3 - 2t^2)$
8	$15t - 3t^3$	0,8	$\frac{\pi}{6}R(t - 2t^2)$

Номер варианта	Закон движения пластины φ = φ (t), рад	Размер R, м	Закон движения точки s = s(t), м
9	$2t^3 - 4t$	1,0	$\frac{\pi}{3}$ R $(3t^2 - 2t)$
10	$6t^2 - 3t^3$	2,0	$\frac{\pi}{4}$ R $(t - 2t^2)$

Пример решения задачи К2. Пластина вращается вокруг горизонтальной оси по закону $\varphi = 2t^2$ рад (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. К2 дуговой стрелкой). По дуге радиуса $R = 0{,}5$ м движется точка M по закону $s = OM = \pi R\frac{t^3}{6}$ м; положительное направление отсчета криволинейной координаты s от O к D.

Определить абсолютную скорость $v_{аб}$ и абсолютное ускорение $a_{аб}$ в момент времени $t = 1$с.

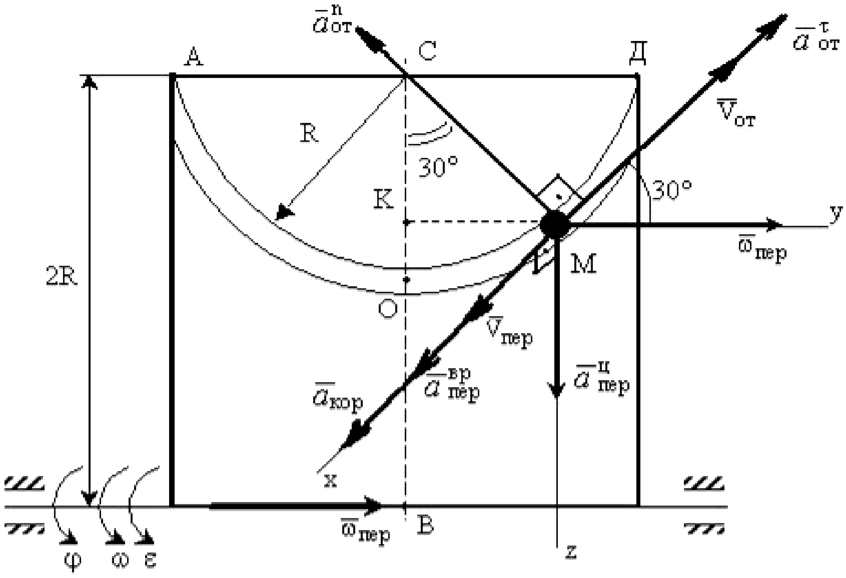


Рис. К2.

Решение: Рассмотрим движение точки M как сложное, считая ее движение по дуге относительным, а движение вместе с пластиной - переносным.

Определим все характеристики относительного и переносного движений.

Относительное движение. Это движение происходит по закону

$$s = OM = \frac{\pi R}{4}\left(7t - 2t^2\right).$$

Сначала установим, где будет находиться точка M на дуге AOD в момент времени t=1c. Полагая в уравнении движения t=1c, получим $s_1 = \frac{5}{6}\pi R$. Тогда $\angle OCM = \frac{s_1}{R} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$. Покажем на рисунке точку в положении, определяемом этим углом.

Теперь находим численные значения v_{om}, a_{om}^{τ} и a_{om}^{n}:

$$v_{om} = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi R}{6}3t^2;\ a_{om}^{\tau} = \frac{dv_{от}}{\mathrm{dt}} = \pi R t;\ a_{om}^{n} = \frac{v_{om}^2}{\rho_{om}} = \frac{v_{om}^2}{R},$$

где ρ_{om}- радиус кривизны относительной траектории.

Для момента времени t=1c, учитывая, что $R = 0{,}5$ м, получим:

$$v_{om} = \frac{\pi R}{2} = \frac{\pi}{4}\text{ м/c};\ a_{om}^{\tau} = \frac{\pi}{2}\,м/c^2;\ a_{om}^{n} = \frac{\pi^2}{8}\,м/c^2.$$

Знаки показывают, что вектор $\overline{v}_{от}$ направлен в сторону положительного отсчета s, вектор $\overline{a}^{\tau}_{от}$ - в ту же сторону; вектор $\overline{a}^{n}_{от}$ направлен к центру *C* по радиусу *MC*.

Переносное движение. Это движение пластины (вращение) происходит по закону φ = 2t^2. Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 4t,\ \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 4.$$

Таким образом, при t = 1с;

$$\omega = 4c^{-1};\ \varepsilon = 4c^{-2}.$$

Для определения $v_{пер}$ и $a_{пер}$ найдем сначала расстояние точки *M* от оси вращения: $h = KB = 2R - R\cdot\cos30°$.

Тогда в момент времени t =1с получим: h = 0,57м.

$v_{пер} = \omega \cdot h = 4 \cdot 0{,}57 = 2{,}28$ м/с;

$a^{вр}_{пер} = \varepsilon \cdot h = 4*0{,}57 = 2{,}28$ м/с^2;

$a^{ц}_{пер} = \omega^2 \cdot h = 42 \cdot 0{,}57 = 9{,}12$ м/с^2.

Показываем на рисунке вектор $\overline{v}_{пер}$ с учетом направления ω и векторы $\overline{a}^{ц}_{пер}$ (направлен к оси вращения), $\overline{a}^{вр}_{пер}$ (направлен как $\overline{v}_{пер}$).

Кориолисово ускорение. Так как угол между вектором $\overline{v}_{от}$ и вектором $\overline{\omega}$ равен 30°, то численно в момент времени t = 1с

$a_{кор} = 2\,|\,\overline{v}_{от}\,|\,|\,\overline{\omega}\,|\cdot\sin30° = 2\ \pi/4\ 4\ 1/2 = 3{,}14/c^2$.

Направление вектора $\overline{a}_{кор}$ найдем, спроецировав вектор $\overline{v}_{от}$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена противоположно вектору $\overline{a}^{ц}_{пер}$), и повернув затем эту проекцию в сторону ω, т.е. по ходу вращения тела, на 90°. Изображаем вектор $\overline{a}_{кор}$ на рисунке.

Определение $v_{аб}$. Так как $\overline{v}_{аб} = \overline{v}_{от} + \overline{v}_{пер}$, а векторы $\overline{v}_{от}$ и $\overline{v}_{пер}$ взаимно перпендикулярны, то в момент времени t =1с

$$v_{аб} = \sqrt{v^2_{отн} + v^2_{пер}} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + (2.28)^2} = 2{,}4 \text{ м/с}.$$

Определение $a_{аб}$. По теореме о сложении ускорений

$$\overline{a}_{аб} = \overline{a}^{\tau}_{от} + \overline{a}^{n}_{от} + \overline{a}^{ц}_{пер} + \overline{a}^{вр}_{пер} + \overline{a}_{кор}.$$

Для определения $a_{аб}$ проведем координатные оси *Mxyz* и вычислим проекции вектора $\overline{a}_{аб}$ на эти оси. Учтем при этом, что векторы $\overline{a}_{кор}$, $\overline{a}^{вр}_{пер}$ лежат на проведенной оси *x*, а векторы $\overline{a}^{\tau}_{от}$, $\overline{a}^{n}_{от}$, $\overline{a}^{ц}_{пер}$ расположены в плоскости *Myz*. Получим для момента времени t = 1с:

$a_{абx} = a_{кор} + a^{вр}_{пер} = 5{,}42$м/с^2;

$a_{абy} = -\,a^{n}_{от}\cos 60° + a^{\tau}_{от}\cos 30° = 0{,}74$ м/с^2;

$a_{абz} = -\,a^{\tau}_{от}\cos 60° - a^{n}_{от}\cos 30° + a^{ц}_{пер} = 7{,}27$ м/с^2.

Отсюда находим значение $a_{аб}$ в момент времени t_1 =1с:

$a_{аб} = \sqrt{a^2_{абx} + a^2_{абy} + a^2_{абz}} = 9{,}1$ м/с^2.

Ответ: $v_{аб}$ = 2,4 м/с;

$a_{аб}$ = 9,1м/с^2.

<u>**Расчетная работа № 4**</u>

Тема: Динамика точки

Тип задания – расчетная работа.

Задача Д1. Тело *D*, имеющее массу m, получив в точке *A* начальную скорость V_0, движется в изогнутой трубе *ABC*, расположенной в вертикальной плоскости (рис. Д1.1–Д1.10). На участке *AB* на тело, кроме силы тяжести, действуют постоянная сила $\overline{Q}$, направленная вдоль трубы, и сила трения. В точке *B* тело, не изменяя величины своей скорости, переходит на участок ВС и движется, скользя по трубе. При этом на тело, кроме силы тяжести, действуют силы трения и переменная сила $\bar{F}$, величина проекции которой F_x на ось x задана в табл. Д1. Там же приведены величины *m*, V_0, *Q*, расстояние между точками *A* и *B* ($l = AB$) или τ_{AB} – время движения тела от точки *A* до точки *B* и коэффициент трения *f* тела о трубу.

Считая тело материальной точкой, необходимо определить закон движения *x* = (t) на участке *BC*.

Указания. Решение задачи Д1 разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки *D* на участке *AB*, учитывая начальные условия. Затем, зная время движения на участке *AB* (τ_{AB}) или его длину *l*, определить, какую скорость будет иметь тело в точке *B*. Эта скорость будет начальной для движения тела на участке *BC*. После этого необходимо составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения на участке ВС тоже с учетом начальных условий.

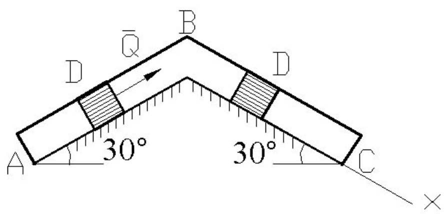


Рис. Д1.1

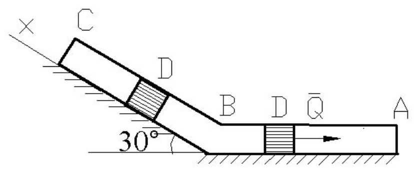


Рис. Д12

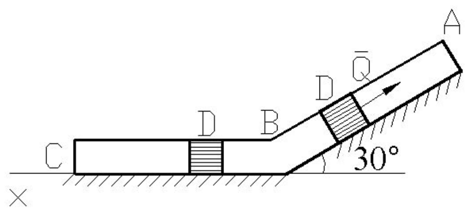


Рис. Д1.3

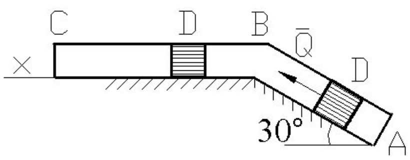


Рис. Д1.4

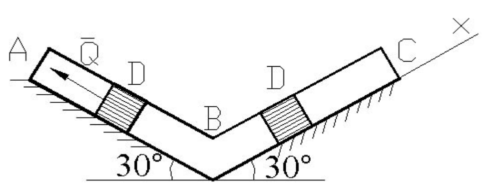


Рис. Д1.5

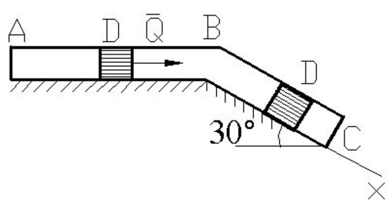


Рис. Д1.6

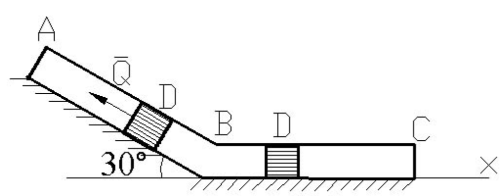


Рис. Д1.7

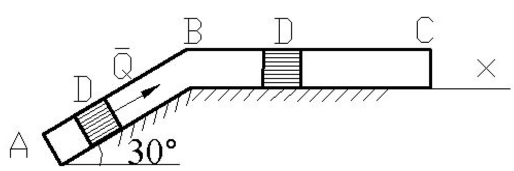


Рис. Д1.8

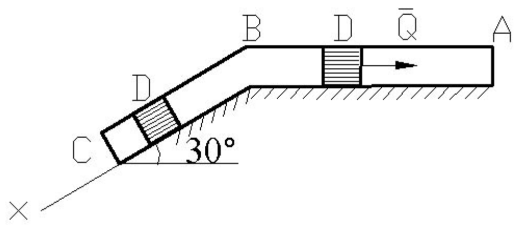


Рис. Д19

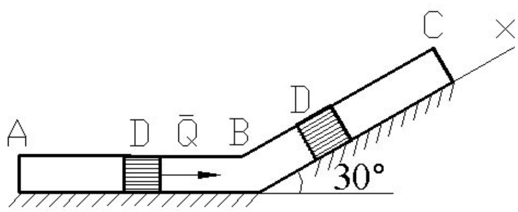


Рис. Д1.10

Таблица Д1

Номер варианта	m, кг	V_0, м/с	Q, H	f	l, м	τ_{AB}, с	F_x, H	Найти
1	2,4	12	5	0,2	1,5	–	4 sin (4t)	V_1
2	2	20	6	0,4	–	2,5	–5cos (4t)	X_1
3	8	10	16	0,3	4	–	6t	V_1
4	1,8	24	5	0,3	–	2	2 cos (2t)	X_1
5	6	15	12	0,2	5	–	5 sin (2t)	V_1
6	4,5	22	9	0,3	–	3	3t	X_1
7	4	12	10	0,1	2,5	–	6 cos (4t)	V_1
8	1,6	18	4	0,4	–	2	3 sin (4t)	X_1
9	4,8	10	10	0,2	4	–	4 cos (2t)	V_1
10	3	22	9	0,3	–	3	4 sin (2t)	X_1

Пример решения задачи Д1.

На вертикальном участке *AB* трубы (рис. Д1) на груз массой m действует сила тяжести и постоянная сила сопротивления $\bar{R}$. Длина участка AB $l_1 = 2$ м. В точке *A* груз имеет начальную скорость $V_0 = 6$ м/с. На наклонном участке *BC* на груз действует сила тяжести, сила трения (коэффициент трения груза о плоскость равен *f*) и переменная сила $F = F(t)$, заданная в ньютонах.

Дано: $m = 5$ кг; $R = 40$ Н; $V_0 = 6$ м/с; $l_{AB} = 2$ м; $f = 0{,}2$; $F_x = 45 \sin(3t)$.

Определить: закон движения груза на участке *BC*: $x = x(t)$.

Решение. Рассмотрим движение груза на участке *AB*, считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\bar{P}$ и $\bar{R}$.

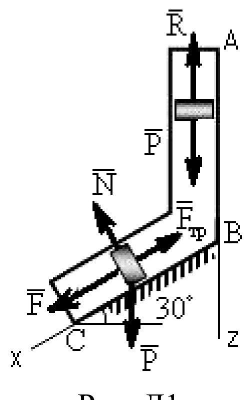


Рис. Д1

Проводим ось Az в направлении движения груза и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{dV_z}{dt}=\sum F_{kz}\ , \quad \text{или} \quad m\frac{dV_z}{dt}=P_z+R_z$$

Далее находим $P_z = P = mg$, $R_z = -R$.

При $V_z = V$ получим

$$m\frac{dV}{dt}=mg-R \ \text{ или } \ \frac{dV}{dt}=g-\frac{R}{m}. \qquad (1)$$

Тогда, разделяя в уравнении (1) переменные и интегрируя обе части равенства, приняв g ≈ 10 м/с^2, получим

$$V=\left(g-\frac{R}{m}\right)t+C_1=2t+C_1. \qquad (2)$$

Из начальных условий при t = 0 скорость $V = V_0$, что даёт $C_1 = V_0$. Тогда уравнение (2) принимает вид

$$V = 2t + 6. \qquad (3)$$

Учитывая, что $V=\frac{dz}{dt}$, получим

$$\frac{dz}{dt}=2t+6.$$

Откуда при разделении переменных и интегрировании

$$z = t^2 + 6t + C_2. \qquad (4)$$

Из начальных условий при t = 0 и начальной координате $z_0 = 0$ находим $C_2 = 0$, следовательно

$$z = t^2 + 6t. \qquad (5)$$

С учётом условий задачи при $z = l_{AB} = 2$ м в точке B можно найти время $t = \tau_{AB}$ движения груза по участку AB:

$$2 = t^2 + 6t \quad \text{или} \quad t^2 + 6t - 2 = 0.$$

Извлекая корни, получим $t_1 = 0{,}3$ с; $t_2 = -6{,}3$ с, в физическом смысле $t = \tau_{AB} = 0{,}3$ с. Тогда по уравнению (3) скорость в точке B

$$V_B = 2\tau_{AB} + 6 = 6{,}6 \text{ м/с}. \qquad (6)$$

Теперь рассмотрим движение груза на участке BC; найденная скорость V_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($V_0 = V_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и показываем действующие на него силы $\overline{P}$, $\overline{N}$, $\overline{F}$ и $\overline{F}_{ТР}$. Проведём из точки B ось Bx и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{dV_x}{dt}=P_x+N_x+F_x+F_{тр}. \qquad (7)$$

Определим проекции сил на ось x:

$$P_x = P\sin 30° = 0{,}5mg; \qquad N_x = 0; \qquad F_x = 45\sin(3t);$$
$$F_{тр\,x} = -fN = -fP\cos 30° = -0{,}17mg,$$

тогда уравнение (8) примет вид

$$m\frac{dV_x}{dt} = 0{,}5mg + 45\sin(3t) - 0{,}17mg = 0{,}33mg + 45\sin(3t). \qquad (8)$$

Разделив обе части равенства на m = 5кг и принимая g ≈ 10 м/с^2, получим

$$\frac{dV_x}{dt}=3{,}3+9\sin(3t). \qquad (9)$$

Умножая обе части уравнения (9) на dt и интегрируя, найдём V_x:

$$V_x = 3{,}3t - 3\cos(3t) + C_2. \qquad (10)$$

На участке *BC* будем отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке *B*, считая в этот момент t = 0. Тогда при t = 0 скорость груза $V = V_0 = V_B = 6{,}6$ м/с. Подставляя эти величины в уравнение (10), получим

$$C_2 = V_B + 3\cos(0) = 6{,}6 + 3 = 9{,}6.$$

При найденном значении C_2 уравнение (10) даёт

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 3{,}3t - 3\cos(3t) + 9{,}6.$$

Умножая обе части на dt и снова интегрируя, найдём

$$x = 1{,}65t^2 + 9{,}6t - \sin(3t) + C_3.$$

Так как на участке *BC* при t = 0 начальная координата *x* = 0, то $C_3 = 0$. Окончательно закон движения груза примет вид

$$x = 1{,}65t^2 + 9{,}6t - \sin(3t),$$

где *x* – в метрах, t – в секундах.

Ответ: $x = 1{,}65t^2 + 9{,}6t - \sin(3t)$.

Расчетная работа № 5

Тема: Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Тип задания – расчетная работа.

Задача Д3. Механическая система состоит из грузов 3 и 4 (коэффициент трения грузов о плоскость $f = 0{,}1$), сплошного однородного цилиндрического катка 5 и ступенчатых шкивов 1 и 2 с радиусами ступеней $R_1 = 0{,}3$ м; $r_1 = 0{,}1$ м; $R_2 = 0{,}2$ м; $r_2 = 0{,}1$ м (массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу) (рис. Д3.1–Д3.10, табл. Д3). Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. Под действием силы $F = F(S)$, зависящей от перемещения *S* точки приложения силы, система приходит в движение из состояния покоя. При движении системы на шкивы 1 и 2 действуют постоянные моменты сил сопротивлений, равные, соответственно, M_1 и M_2.

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение точки приложения силы $\bar{F}$ равно *S*. Искомая величина указана в столбце «Найти» табл. Д3, где V_3 – скорость груза 3; V_{C_5} – скорость центра масс катка 5; ω_1 – угловая скорость тела 1 и т.д.

Указания. При решении задачи Д3 следует учесть, что кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении кинетической энергии катка, движущегося плоскопараллельно, для установления зависимости между его угловой скоростью и скоростью его центра масс нужно воспользоваться понятием о мгновенном центре скоростей (кинематика). При определении работы все перемещения следует выразить через заданное перемещение S, учтя, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

Если по данным табл. Д3 масса груза равна 0, то этот груз на чертеже изображать не надо. Шкивы 1 и 2 всегда входят в систему

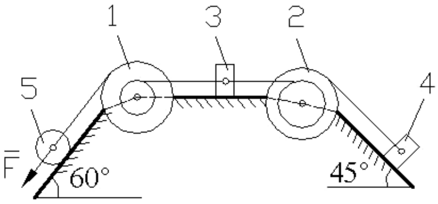


Рис. Д3.1

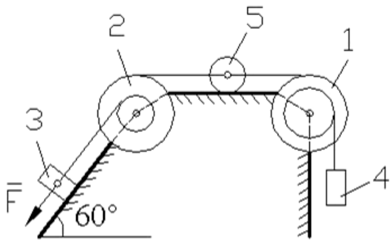


Рис. Д3.2

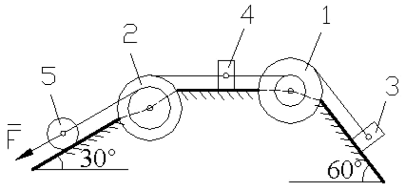


Рис. Д3.3

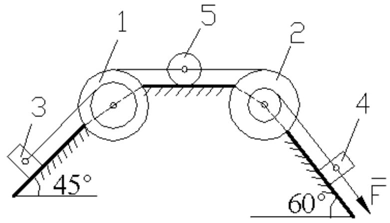


Рис. Д3.4

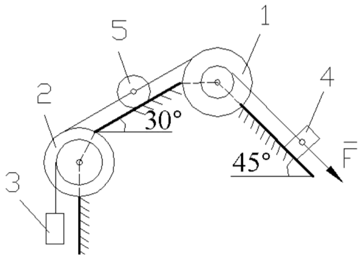


Рис. Д3.5

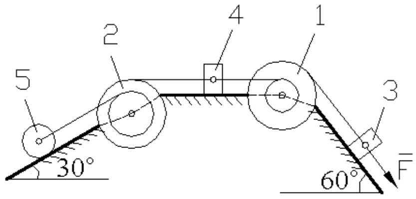


Рис. Д3.6

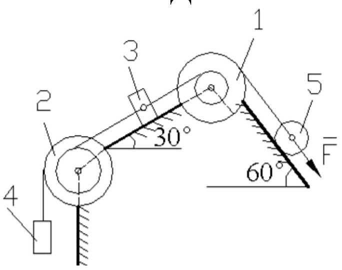


Рис. Д3.7

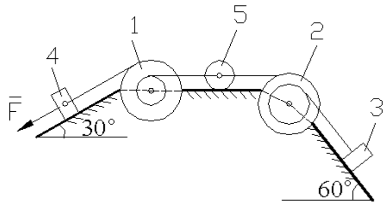


Рис. Д3.8

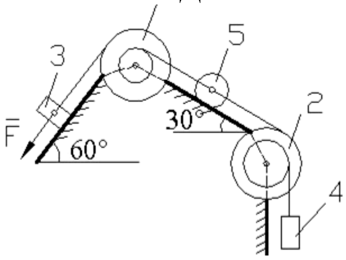


Рис. Д3.9

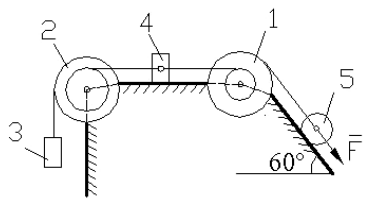


Рис. Д3.10

Таблица Д3

Номер варианта	Масса тел системы, кг					Момент сил сопротивления, Нм		Движущая сила F = F(S), Н	Перемещение S, м	Найти
	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	M_1	M_2			
0	2	0	0	6	4	0	0,8	50(2 + 3S)	1,0	V_4
1	6	0	8	0	2	0,6	0	20(5 + 2S)	1,2	ω_5
2	0	4	0	8	6	0	0,4	80(3 + 4S)	0,8	V_{C5}
3	0	2	10	0	4	0,3	0	40(4 + 5S)	0,6	V_3
4	8	0	0	6	2	0	0,6	30(3 + 2S)	1,4	ω_1

5	8	0	6	0	4	0,9	0	40(3 + 5S)	1,6	V_3
6	0	6	0	8	2	0	0,8	60(2 + 5S)	1,0	ω_2
7	0	4	10	0	6	0,6	0	30(8 + 3S)	0,8	ω_5
8	6	0	8	0	4	0,3	0	50(2 + 5S)	1,6	V_{C5}
9	0	4	0	10	6	0	0,4	50(3 + 2S)	1,4	V_4

Пример решения задачи Д3.

Механическая система (рис. Д3) состоит из сплошного цилиндрического катка 1, ступенчатого шкива 2 с радиусами ступеней R_2 и r_2 (масса шкива равномерно распределена по его внешнему ободу) и груза 3 (коэффициент трения груза о плоскость равен f).Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкив 2.

Под действием силы F = f(S), зависящей от перемещения S точки её приложения, система приходит в движение из состояния покоя. При движении на шкив 2 действует постоянный момент M_2 сил сопротивления.

Дано: $m_1 = 4$ кг; $m_2 = 10$ кг; $m_3 = 2$ кг; $R_2 = 0{,}2$ м; $r_2 = 0{,}1$ м; $f = 0{,}1$; $M_2 = 0{,}6$ Нм; $F = 2\,(1 + 2S)$ Н.

Определить: скорость V_{C_1} центра масс катка, когда $S = S_1 = 1$ м.

Решение. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из тел 1, 2, 3, соединенных нитями. Изобразим все действующие на систему внешние силы: активные $\bar{F}, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$, момент сопротивления M_2, реакции $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$, $\bar{N}_3$ и силы трения $\bar{F}_1^{\text{тр}}$ и $\bar{F}_3^{\text{тр}}$.

Для определения V_{C1} воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e. \qquad (1)$$

Определяем T_0 и T. Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \qquad (2)$$

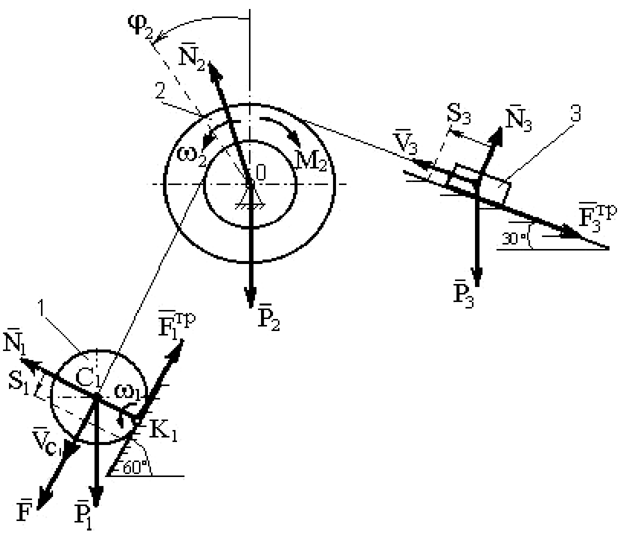


Рис. Д3

Учитывая, что тело 1 движется плоскопараллельно, тело 3 – поступательно, а тело 2 вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$T_1 = \frac{m_1 V_{C_1}^2}{2} + \frac{I_{C_1}\omega_1^2}{2};\; T_2 = \frac{I_2\omega_2^2}{2};\; T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2}. \qquad (3)$$

Все входящие сюда скорости следует выразить через искомую V_{C_1}. Приняв во внимание, что точка K_1 – мгновенный центр скоростей катка l, и обозначив радиус катка через r_1, получим

$$\omega_1 = \frac{V_{C_1}}{K_1C_1} = \frac{V_{C_1}}{r_1};\ \omega_2 = \frac{V_{C_1}}{r_2};\ V_3 = \omega_2 R_2 = V_{C_1}\frac{R_2}{r_2} \qquad (4)$$

Кроме того, входящие в уравнение (3) моменты инерции имеют значения

$$I_{C_1} = 0{,}5m_1 \cdot r_1^2;\quad I_2 = m_2 \cdot R_2^2. \qquad (5)$$

Подставив все величины (4) и (5) в равенства (3), получим кинетическую энергию системы:

$$T = \left(\frac{3}{4}m_1 + \frac{1}{2}m_2\frac{R_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2}m_3\frac{R_2^2}{r_2^2}\right)V_{C_1}^2 = 27V_{C_1}^2 \quad . \qquad (6)$$

Найдём сумму работ всех действующих внешних сил при том перемещении, которое будет иметь система, когда точка C_1 пройдет путь S_1, для чего учтем, что здесь зависимость между перемещениями будет такой же, как и между соответствующими скоростями в равенствах (4), т.е.

$$\varphi_2 = \frac{S_1}{r_2},\ S_3 = S_1\frac{R_2}{r_2}.$$

В результате получим

$$A(\overline{F}) = \int_0^{S_1} 2(1+2S)\,dS = 2(S_1 + S_1^2);$$

$$A(\overline{P}_1) = P_1S_1\sin 60°;\quad A(M_2) = -M_2\varphi_2 = -M_2\frac{S_1}{r_2};$$

$$A(\overline{P}_3) = -P_3S_3\sin 30° = -P_3S_1\frac{R_2}{r_2}\sin 30°;$$

$$A(F_3^{\text{тр}}) = -F_3^{\text{тр}}S_3 = fN_3S_3 = -fP_3\cos 30^o S_1\frac{R_2}{r_2}$$

Работа остальных сил равна нулю, так как точка K_1 – мгновенный центр скоростей, точка О неподвижна, а реакция $\overline{N}_3$ перпендикулярна перемещению груза 3. Тогда окончательно

$$\sum A_k^e = 2(S_1 + S_1^2) + P_1S_1\sin 60° - M_2\frac{S_1}{r_2} - P_3S_1\frac{R_2}{r_2}(\sin 30° + f\cos 30°). \qquad (7)$$

С учетом значений заданных величин получим величину работ всех сил:

$$\sum A_k^e = 8{,}96. \qquad (8)$$

Подставив выражения (6) и (8) в уравнение (1) и учитывая, что $T_0 = 0$, получим

$$27 \cdot V_{C_1}^2 = 8{,}96.$$

Отсюда находим искомую скорость.

Ответ: $V_{C_1} = 0{,}58$ м/с.