



Негосударственное частное образовательное учреждение
высшего образования
«Технический университет УГМК»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ
РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

Специальность 21.05.04 Горное дело

Специализация Подземная разработка рудных месторождений

Уровень высшего образования Специалитет
(бакалавриат, специалитет, магистратура)

Автор-разработчик: Петрова С.Н., канд. пед. наук, доцент
Рассмотрено на заседании кафедры механики и автоматизации технологических процессов и
производств
Одобрено Методическим советом университета 30 июня 2021 г., протокол № 4

г. Верхняя Пышма
2021

Методические указания к выполнению контрольной работы составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины.

Контрольная работа является составной частью самостоятельной работы обучающихся дисциплине «Теоретическая механика». Выполнение контрольных работ имеет целью закрепление обучающимися полученных на лекциях теоретических знаний и практического опыта, приобретенного на практических занятиях, путем самостоятельной работы.

Сложное движение точки

Теорема о сложении скоростей: при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

$$\vec{v}_{аб} = \vec{v}_{от} + \vec{v}_{пер}.$$

Если угол между векторами $\vec{v}_{от}$ и $\vec{v}_{пер}$ равен α , то по модулю

$$v_{аб} = \sqrt{v_{от}^2 + v_{пер}^2 + 2v_{от}v_{пер}\cos\alpha}.$$

Теорема о сложении ускорений: при сложном движении ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и кориолисова.

$$\vec{a}_{аб} = \vec{a}_{от} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}$$

Кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению переносной угловой скорости тела на относительную скорость точки.

$$\vec{a}_{кор} = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_{от}).$$

Модуль кориолисова ускорения, если угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{v}_{от}$ обозначить α , будет равен

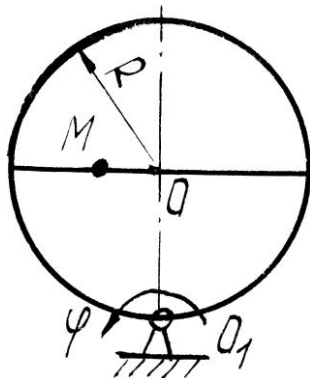
$$a_{кор} = 2|\omega||v_{от}|\sin\alpha.$$

Задачи для самостоятельного решения

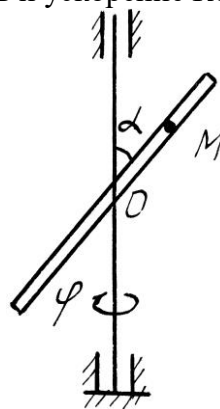
Задача 6.1. Круглая пластина радиуса $R = 0,2$ м вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости пластины и проходящей через точку O_1 , по закону $\varphi = t^2$ рад. Точка M движется по закону $OM = S_r = 0,2 t^3$ м. Определить абсолютное ускорение точки M при $t = 1$ с.

Задача 6.2. Стержень вращается вокруг неподвижной вертикальной оси по закону, $\varphi = t^2$ рад. Точка M движется по закону $OM = S_r = 0,2 t^3$ м. Определить абсолютное ускорение точки M при $t = 1$ с, если $\alpha = 30^\circ$.

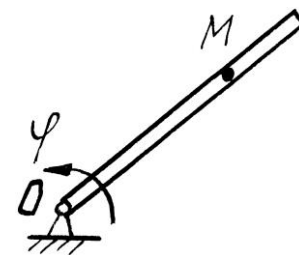
Задача 6.3. Стержень вращается вокруг оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через точку O , по закону $\varphi = 2t^2$ рад. Точка M движется вдоль стержня по закону, $OM = S_r = 0,4 t^3$ м. Определить абсолютную скорость и ускорение Кориолиса точки M при $t = 1$ с.



К задаче 6.1.



К задаче 6.2.



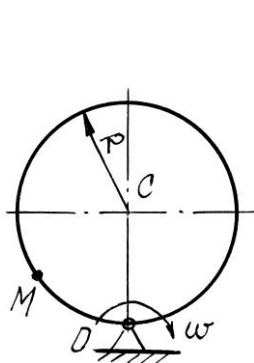
К задаче 6.3.

Задача 6.4. Диск радиуса $R = 0,5$ м вращается вокруг неподвижной оси, перпендикулярной диску и проходящей через точку O , с угловой скоростью $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$. По ободу диска движется точка

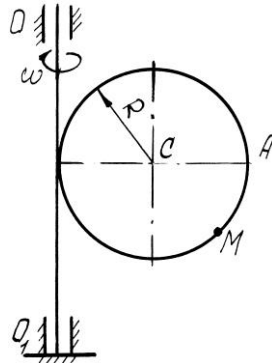
M по закону $OM = S_r = 0,5 \pi R t^2$ м. Определить абсолютное ускорение точки M в момент времени $t = 1$ с.

Задача 6.5. Диск радиуса $R = 0,5$ м вращается вокруг неподвижной оси OO_1 с угловой скоростью $\omega = 2 t \text{ c}^{-1}$. По ободу диска движется точка M по закону $AM = S_r = \pi t$ м. Определить абсолютное ускорение точки M в момент времени $t = 1$ с.

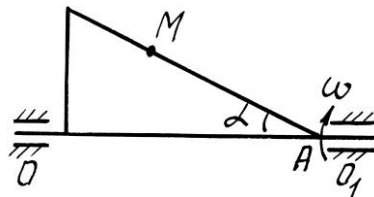
Задача 6.6. Прямоугольный треугольник вращается' вокруг, оси OO_1 с постоянной угловой скоростью $\omega = 2 \text{ c}^{-1}$. По стороне треугольника движется точка M по закону $AM = S_r = 0,4 t$ м. Определить ускорение точки M в момент времени $t = 1$ с, если $\alpha = 30^\circ$.



К задаче 6.4



К задаче 6.5

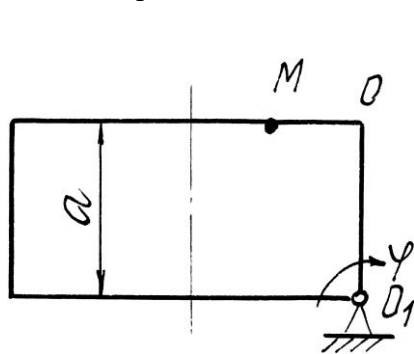


К задаче 6.6

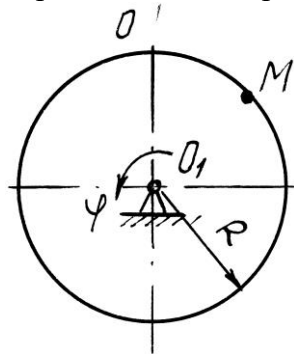
Задача 6.7. Прямоугольная пластина вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости пластины и проходящей через точку O_1 , по закону $\varphi = 2t^2$ рад. Точка M движется по закону $OM = S_r = 0,6 t^2$ м. Определить абсолютное ускорение точки M при $t = 1$ с, если $a = 0,6$ м.

Задача 6.8. Диск радиуса $R = 0,5$ м вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через центр O_1 , по закону $\varphi = 2t^2$ рад. Точка M движется по закону $OM = S_r = \pi t^2$ м. Определить абсолютную скорость и ускорение Кориолиса точки M при $t = 1$ с.

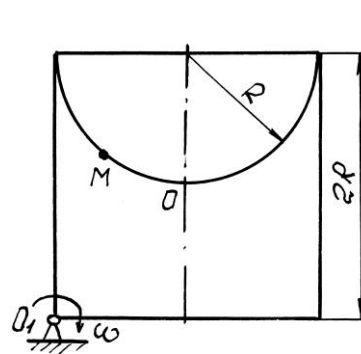
Задача 6.9. Пластина вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости пластины и проходящей через точку O_1 , с угловой скоростью $\omega = t^2 \text{ c}^{-1}$. Точка M движется по закону $OM = S_r = 0,5\pi t$ м. Определить абсолютное ускорение точки M при $t = 1$ с, если $R = 1$ м.



К задаче 6.7



К задаче 6.8

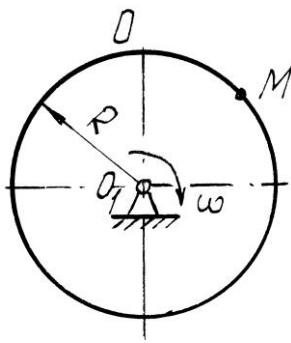


К задаче 6.9

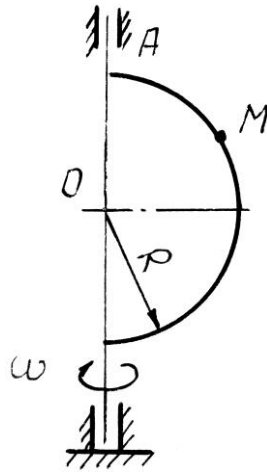
Задача 6.10. Диск вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр O_1 , с угловой скоростью $\omega = t^3 \text{ c}^{-1}$. По ободу диска движется точка M по закону $OM = S_r = 2\pi t^3$ м. Определить абсолютное ускорение точки M в момент времени $t = 1$ с, если радиус диска $R = 0,2$ м.

Задача 6.11. Полудиск радиуса $R = 2$ м вращается вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью $\omega = 2 \text{ c}^{-1}$. По его ободу движется точка M по закону $OM = S_r = \pi R t$ м. Определить абсолютное ускорение точки M в момент времени $t = 1/3$ с.

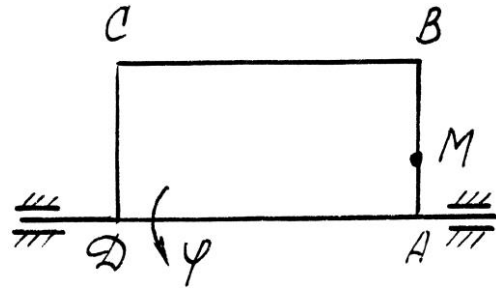
Задача 6.12. Прямоугольная пластина вращается вокруг стороны AD по закону $\varphi = 3t^3$ рад. По стороне AB движется точка по закону $AM = S_r = 3 t$ м. Определить абсолютное ускорение точки M в момент времени $t = 1$ с.



К задаче 6.10



К задаче 6.11

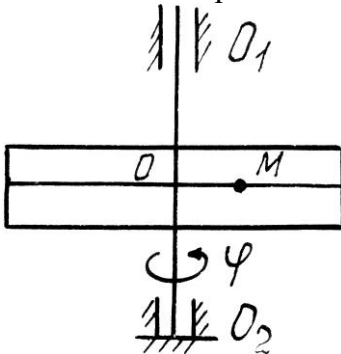


К задаче 6.12

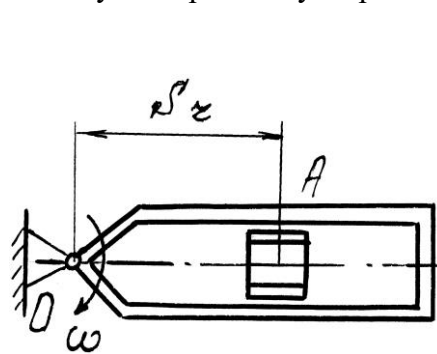
Задача 6.13. Пластина вращается вокруг вертикальной оси O_1O_2 по закону $\varphi = 2t^2$ рад. Точка M движется по закону $OM = S_r = 0,2 t^2$ м. Определить абсолютное ускорение точки M при $t = 1$ с.

Задача 6.14. Кулиса вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 2\text{с}^{-1}$ вокруг оси, перпендикулярной к плоскости кулисы и проходящей через точку O . Ползун A движется в направляющих кулисы по закону $OM = S_r = t^2$ м. Определить абсолютное ускорение ползуна при $t = 1$ с.

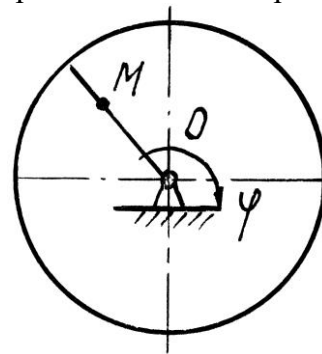
Задача 6.15. Диск $R = 2\text{м}$ вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через центр O , по закону $\varphi = 2t^2$ рад. Вдоль радиуса движется точка M по закону $OM = S_r = 4\pi t^2$ м. Определить абсолютную скорость и ускорение Кориолиса точки M при $t = 1$ с.



К задаче 6.13



К задаче 6.14

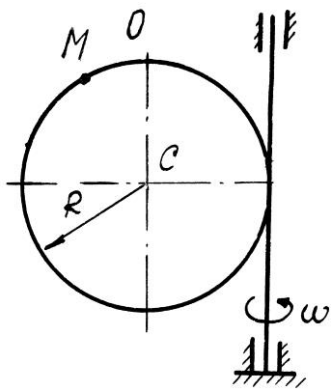


К задаче 6.15

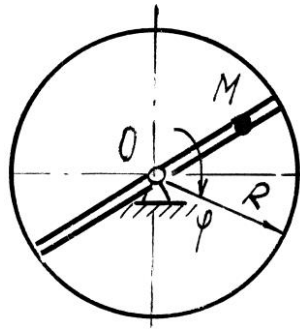
Задача 6.16. Круглая пластина радиуса $R = 0,5$ м вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega = 2 t \text{с}^{-1}$. Точка M движется по закону $OM = S_r = 0,2\pi t^2$ м. Определить абсолютное ускорение точки M при $t = 1$ с.

Задача 6.17. Круглая пластина радиуса $R = 1\text{м}$ вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости пластины и проходящей через центр O , по закону $\varphi = 3t^2$ рад. Точка M движется по закону $OM = S_r = 0,4 t^3$ м. Определить абсолютное ускорение точки M при $t = 1$ с.

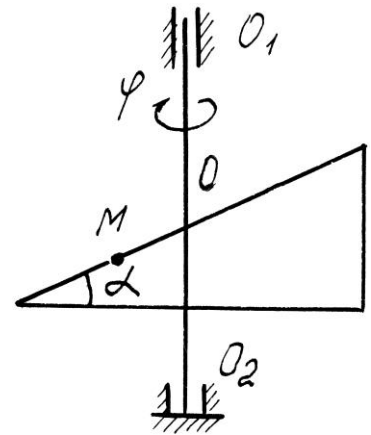
Задача 6.18. Пластина вращается вокруг вертикальной оси O_1O_2 по закону $\varphi = 2t$ рад. Точка M движется по закону $OM = S_r = 0,1 t^3$ м. Определить абсолютное ускорение точки M при $t = 1$ с, если $\alpha = 60^\circ$.



К задаче 6.16



К задаче 6.17

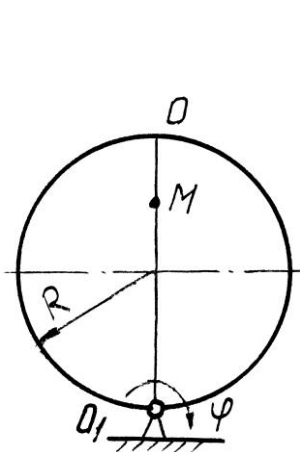


К задаче 6.18

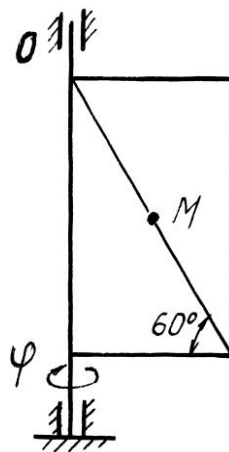
Задача 6.19. Диск вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через точку O_1 , по закону $\varphi = 2t^2$ рад. По диаметру диска движется точка M по закону $OM = S_r = 0,4 t^2$ м. Определить абсолютное ускорение точки M при $t = 1$ с, если радиус диска $R = 1$ м.

Задача 6.20. Пластина вращается вокруг вертикальной оси по закону $\varphi = 3t^2$ рад. Точка M движется по закону $OM = S_r = 0,8 t^2$ м. Определить абсолютную скорость и ускорение Кориолиса точки M при $t = 1$ с.

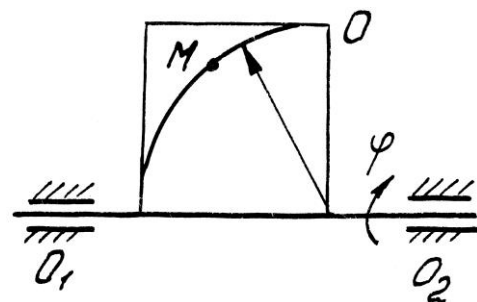
Задача 6.21. Пластина вращается вокруг горизонтальной оси O_1O_2 по закону $\varphi = 2t$ рад. Точка M движется по закону $OM = S_r = 0,25 \pi^2 t^2$ м. Определить абсолютное ускорение точки M при $t = 1$ с, если $R = 1$ м.



К задаче 6.19



К задаче 6.20

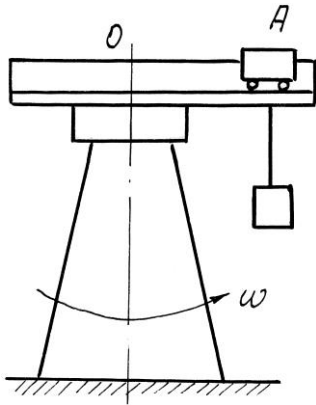


К задаче 6.21

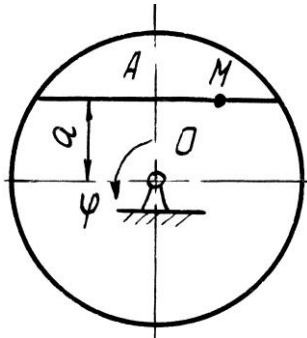
Задача 6.22. Башенный кран вращается равномерно с угловой скоростью $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$. Крановая тележка A перемещается по стреле по закону $OA = S_r = 2 t^2$ м. Определить абсолютное ускорение тележки в момент времени $t = 1$ с.

Задача 6.23. Диск вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через центр O , по закону $\varphi = 2t^2$ рад. Точка M движется по закону $AM = S_r = 0,4 t^2$ м. Определить абсолютное ускорение точки M в момент $t = 1$ с, если $a = 0,3$ м.

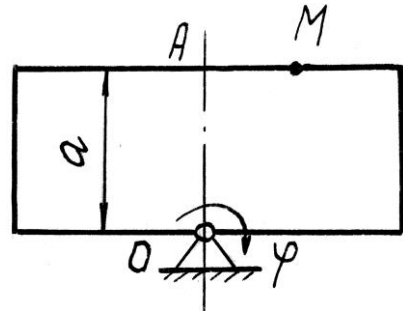
Задача 6.24. Прямоугольная пластина вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости пластины и проходящей через точку O , по закону $\varphi = 4t$ рад. Точка M движется по закону $OM = S_r = 4 t^2$ м. Определить абсолютное ускорение точки M , при $t = 1$ с, если $a = 3$ м.



К задаче 6.22



К задаче 6.23

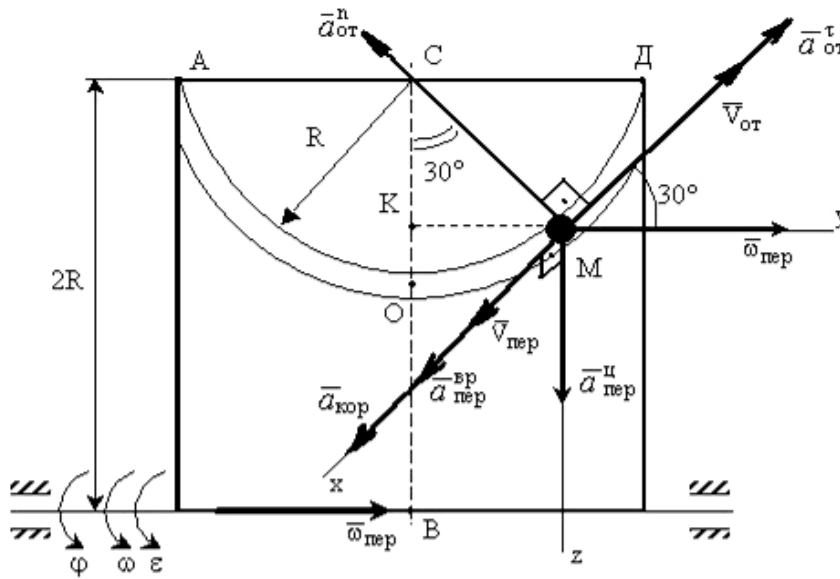


К задаче 6.24

Примеры решения задач

Задача 1. Пластина вращается вокруг горизонтальной оси по закону $\varphi = 2t^2$ рад (положительное направление отсчета угла φ показано на рисунке дуговой стрелкой). По дуге радиуса $R = 0,5$ м движется точка M по закону $s = OM = \pi R \frac{t^3}{6}$ м; положительное направление отсчета криволинейной координаты s от O к D .

Определить абсолютную скорость $v_{аб}$ и абсолютное ускорение $a_{аб}$ в момент времени $t = 1$ с.



К задаче 1.

Решение: Рассмотрим движение точки M как сложное, считая ее движение по дуге относительным, а движение вместе с пластиной - переносным.

Определим все характеристики относительного и переносного движений.

Относительное движение. Это движение происходит по закону

$$s = OM = \frac{\pi R}{4} (7t - 2t^2).$$

Сначала установим, где будет находиться точка M на дуге AOD в момент времени $t=1$ с.

Полагая в уравнении движения $t=1$ с, получим $s_1 = \frac{5}{6} \pi R$. Тогда $\angle OCM = \frac{s_1}{R} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$. Покажем на рисунке точку в положении, определяемом этим углом.

Теперь находим численные значения $v_{ом}$, $a_{ом}^\tau$ и $a_{ом}^n$:

$$v_{om} = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi R}{6} 3t^2; a_{om}^{\tau} = \frac{dv_{от}}{dt} = \pi R t; a_{om}^n = \frac{v_{om}^2}{\rho_{om}} = \frac{v_{om}^2}{R},$$

где ρ_{om} - радиус кривизны относительной траектории.

Для момента времени $t=1$ с, учитывая, что $R = 0,5$ м, получим:

$$v_{om} = \frac{\pi R}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ м/с}; a_{om}^{\tau} = \frac{\pi}{2} \text{ м/с}^2; a_{om}^n = \frac{\pi^2}{8} \text{ м/с}^2.$$

Знаки показывают, что вектор $\vec{v}_{от}$ направлен в сторону положительного отсчета s , вектор \vec{a}_{om}^{τ} - в ту же сторону; вектор \vec{a}_{om}^n направлен к центру C по радиусу MC .

Переносное движение. Это движение пластины (вращение) происходит по закону $\varphi = 2t^2$. Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 4t, \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 4.$$

Таким образом, при $t = 1$ с;

$$\omega = 4\text{с}^{-1}; \varepsilon = 4\text{с}^{-2}.$$

Для определения v_{nep} и a_{nep} найдем сначала расстояние точки M от оси вращения: $h = KB = 2R - R \cdot \cos 30^\circ$.

Тогда в момент времени $t=1$ с получим: $h = 0,57$ м.

$$v_{nep} = \omega \cdot h = 4 \cdot 0,57 = 2,28 \text{ м/с};$$

$$a_{nep}^{ep} = \varepsilon \cdot h = 4 \cdot 0,57 = 2,28 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{nep}^u = \omega^2 \cdot h = 16 \cdot 0,57 = 9,12 \text{ м/с}^2.$$

Показываем на рисунке вектор \vec{v}_{nep} с учетом направления ω и векторы \vec{a}_{nep}^u (направлен к оси вращения), \vec{a}_{nep}^{ep} (направлен как \vec{v}_{nep}).

Кориолисово ускорение. Так как угол между вектором \vec{v}_{om} и вектором $\vec{\omega}$ равен 30° , то численно в момент времени $t = 1$ с

$$a_{кор} = 2 |\vec{v}_{om}| |\vec{\omega}| \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 3,14 \text{ м/с}^2.$$

Направление вектора $\vec{a}_{кор}$ найдем, спроецировав вектор \vec{v}_{om} на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена противоположно вектору \vec{a}_{nep}^u), и повернув затем эту проекцию в сторону ω , т.е. по ходу вращения тела, на 90° . Изображаем вектор $\vec{a}_{кор}$ на рисунке.

Определение $v_{аб}$. Так как $\vec{v}_{аб} = \vec{v}_{от} + \vec{v}_{nep}$, а векторы $\vec{v}_{от}$ и \vec{v}_{nep} взаимно перпендикулярны, то в момент времени $t = 1$ с

$$v_{аб} = \sqrt{v_{от}^2 + v_{nep}^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + (2,28)^2} = 2,4 \text{ м/с}.$$

Определение $a_{аб}$. По теореме о сложении ускорений

$$\vec{a}_{аб} = \vec{a}_{om}^{\tau} + \vec{a}_{om}^n + \vec{a}_{nep}^u + \vec{a}_{nep}^{ep} + \vec{a}_{кор}.$$

Для определения $a_{аб}$ проведем координатные оси $Mxyz$ и вычислим проекции вектора $\vec{a}_{аб}$ на эти оси. Учтем при этом, что векторы $\vec{a}_{кор}$, \vec{a}_{nep}^{ep} лежат на проведенной оси x , а векторы \vec{a}_{om}^{τ} , \vec{a}_{om}^n , \vec{a}_{nep}^u расположены в плоскости Myz . Получим для момента времени $t = 1$ с:

$$a_{абx} = a_{кор} + a_{nep}^{ep} = 5,42 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{абy} = -a_{om}^n \cos 60^\circ + a_{om}^{\tau} \cos 30^\circ = 0,74 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{абz} = -a_{om}^{\tau} \cos 60^\circ - a_{om}^n \cos 30^\circ + a_{nep}^u = 7,27 \text{ м/с}^2.$$

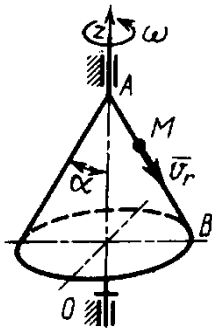
Отсюда находим значение $a_{аб}$ в момент времени $t_1 = 1$ с:

$$a_{a6} = \sqrt{a_{a6x}^2 + a_{a6y}^2 + a_{a6z}^2} = 9,1 \text{ м/с}^2.$$

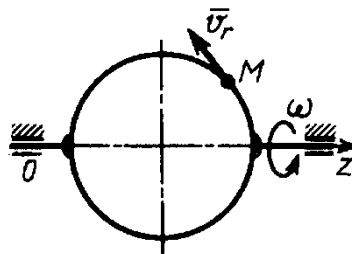
Ответ: $v_{a6} = 2,4 \text{ м/с}$;
 $a_{a6} = 9,1 \text{ м/с}^2$.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Какое движение точки называют относительным, переносным, абсолютным?
2. Напишите и объясните формулы, выражающие теоремы о сложении скоростей и ускорений точки.
3. Как определить модуль и направление кориолисова ускорения?
4. Конус вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью $\omega = 3 \text{ с}^{-1}$. По его образующей с постоянной скоростью $v_r = v_{om} = 4 \text{ м/с}$ движется точка M в направлении от A к B . Определите модуль абсолютной скорости этой точки в положении, когда расстояние $AM = 2 \text{ м}$, если угол $\alpha = 30^\circ$ (Ответ: $v_{a6} = 5 \text{ м/с}$).
5. Диск вращается вокруг оси Oz . По его ободу движется точка M с постоянной относительной скоростью $v_r = v_{om} = 9 \text{ м/с}$. Определите переносную скорость точки M в момент, когда ее абсолютная скорость равна 15 м/с (Ответ: $v_{nep} = 12 \text{ м/с}$).



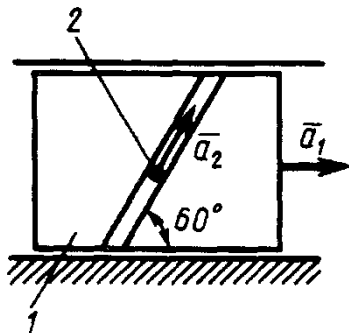
К заданию 4.



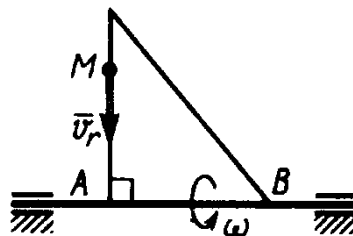
К заданию 5.

6. Ползун 1 движется по горизонтальным направляющим с постоянным ускорением $a_1 = 4 \text{ м/с}^2$. Точка 2 перемещается по отношению к ползуну с ускорением $a_2 = 3 \text{ м/с}^2$. Определите абсолютное ускорение точки (Ответ: $a_{a6} = 6,08 \text{ м/с}^2$).

7. По стороне треугольника, вращающегося вокруг стороны AB с угловой скоростью $\omega = 8 \text{ с}^{-1}$, движется точка M с относительной скоростью $v_r = v_{om} = 4 \text{ м/с}$. Определите модуль ускорения Кориолиса точки M (Ответ: $a_{кор} = 64 \text{ м/с}^2$).



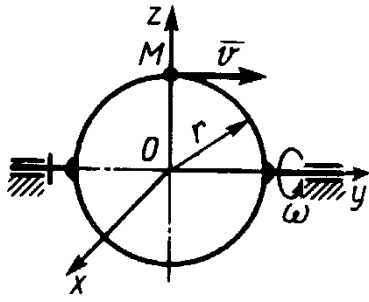
К заданию 6.



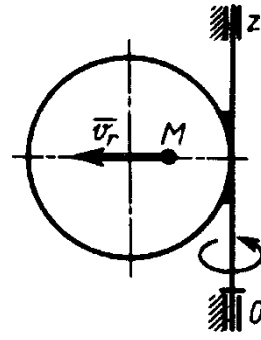
К заданию 7.

8. Точка M движется с постоянной скоростью $v = 2 \text{ м/с}$ по кольцу радиуса $r = 0,5 \text{ м}$, который вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 4 \text{ с}^{-1}$. Определите модуль абсолютного ускорения точки M в указанном положении (Ответ: $a_{a6} = 16 \text{ м/с}^2$).

9. По диаметру диска, вращающегося вокруг оси Oz , движется точка M с относительной скоростью $v_r = v_{om} = 4t^3 \text{ м/с}$. Определите модуль относительного ускорения точки M в момент времени $t = 1 \text{ с}$ (Ответ: $a_{om} = 64 \text{ м/с}^2$).



К заданию 8.



К заданию 9.