Негосударственное частное образовательное учреждение
высшего образования
«Технический университет УГМК»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Динамика

Направление подготовки	**35.03.02 Технология лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств**
Направленность (профиль)	**Машины и технологии лесопромышленных производств и транспортных процессов**
Уровень высшего образования	**Бакалавриат**

г. Верхняя Пышма

Методические указания по дисциплине одобрены на заседании Методического совета университета «25» января 2024 г., протокол № 3.

Председатель Методического совета университета Т.В. Гурская

Данные методические указания призваны систематизировать решение студентами задач по теоретические механики из раздела «Динамика». В предлагаемых методических указаниях представлено краткое изложение теории по основным темам раздела «Динамика» теоретической механики. По каждой теме предложен порядок решения задачи.

Динамика

Тема 1. Динамика точки.

Решение первой задачи динамики. Порядок решения задач.

1. Изобразить на расчетной схеме материальную точку в текущем положении и приложенные к ней силы.
2. Выбрать систему отсчета, если она не указана в условии задачи. Если точка движется по дуге окружности, то следует выбрать систему осей естественного трехгранника: касательная τ и нормаль n для плоской системы сил и касательная τ и нормаль n и бинормаль b для пространственной системы сил.
3. Определить по заданному закону движения ускорение материальной точки и найти его проекции на выбранные оси координат.
4. Составить основные уравнения динамики материальной точки в проекциях на оси координат. Для осей естественного трехгранника они имеют вид:

$$mS = \sum_k F_{k\tau},$$

$$m\frac{V^2}{\rho} = \sum_k F_{kn},$$

$$ma_b = \sum_k F_{kb}.$$

Для декартовых осей координат дифференциальные уравнения движения точки имеют вид:

$$m\ddot{x} = \sum_{r} F_{kx},$$

$$m\ddot{y} = \sum_{k} F_{ky},$$

$$m\ddot{z} = \sum_{k} F_{kz}.$$

5. Определить искомые силы, решая систему уравнений.

Решение второй задачи динамики. [1] §§ 104-108; [2] стр. 28-74.

Порядок решения задач.

1. Выбрать систему координат.
2. Записать начальные условия движения точки.
3. Изобразить на рисунке силы, приложенные к материальной точке.
4. Составить дифференциальные уравнения движения материальной точки.
5. Проинтегрировав систему дифференциальных уравнений движения, найти проекции скорости точки и, пользуясь начальными условиями движения, определить произвольные постоянные.
6. Проинтегрировав систему дифференциальных уравнений, определяющих зависимость проекций скорости от времени, найти уравнения движения точки и, пользуясь начальными условиями движения, определить произвольные постоянные.
7. Из полученных уравнений движения точки определить искомые величины.

Тема 2. Теорема о движении центра масс механической системы.

Порядок решения задач.

1. Изобразить на расчетной схеме задачи все внешние силы, приложенные к телам системы.
2. Выбрать систему координат.
3. Записать теорему о движении центра масс механической системы в проекциях на выбранные оси декартовой системы координат:

$$M\ddot{x}_C = \sum_k F^e_{kx}\,, \qquad M\ddot{y}_C = \sum_k F^e_{ky}.$$

4. Определить сумму проекций всех внешних сил системы на оси декартовых координат.
5. Представить левые части уравнений в виде

$$M\ddot{x}_C = \sum_k m_k x \;; \qquad M\ddot{y}_C = \sum_k m_k y_k.$$

6. Записать дифференциальные уравнения движения центра масс системы с учетом пункта 5.
7. Найти искомые внешние силы из прямой задачи, или, проинтегрировав получившееся дифференциальное уравнение, определить искомый закон движения центра масс одного из тел системы.

Общие теоремы динамики точки и механической системы.

Тема 3. Теорема об изменении количества движения материальной точки.

Порядок решения задач.

1. Составить расчетную схему, на которой изобразить материальную точку и действующие на неё силы.

2. Выбрать систему координат.

3. Записать теорему об изменении количества движения материальной точки.

$$m\vec{V}_1 - m\vec{V}_0 = \sum_k \vec{S}_k,$$

$$\text{где } \vec{S}_k = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_k dt.$$

Спроецировать ее на выбранные оси. Для декартовой системы координат:

$$mV_{1x} - mV_{0x} = \sum_k S_{kx},$$

$$mV_{1y} - mV_{0y} = \sum_k S_{ky},$$

$$\text{где } S_{kx} = \int_{t_0}^{t_1} F_{kx} dt.$$

4. Если в задаче требуется определить начальную или конечную скорость точки при заданном законе изменения сил и промежутке времени их действия, то, вычислив проекции импульсов сил и подставив их значения в уравнения предыдущего пункта, определяют искомые проекции скорости точки.

5. Если по условию задачи требуется определить одну из постоянных сил, приложенных к материальной точке, то ее можно легко получить из уравнений пункта 3.

Теорема об изменении количества движения механической системы.

Порядок решения задач:

1. Составить расчетную схему, на которой изобразить рассматриваемое тело (систему) и действующие на него внешние силы.
2. Выбрать систему координат.
3. Записать теорему об изменении главного вектора количества движения механической системы в проекциях на оси координат.

$$MV_{C1x} - MV_{C0x} = \sum_k S^e_{kx},$$

$$MV_{C1y} - MV_{C0y} = \sum_k S^e_{ky},$$

$$\text{где } S^e_{kx} = \int_{t_0}^{t_1} F^e_{kx}\,dt.$$

4. Решить полученные уравнения и найти искомую величину.

Если сумма проекций импульсов внешних сил на какую либо ось равна нулю, то проекция главного вектора количества движения на эту ось в начальный и конечный моменты времени есть величина постоянная:

$$MV_{C1x} = MV_{C0x}, \qquad \text{или} \qquad MV_{C1y} = MV_{C0y}.$$

Тема 4. Работа, мощность.

Порядок решения задач.

1. Начертить расчетную схему, на которой указать действующие на тело силы, а также его перемещение.

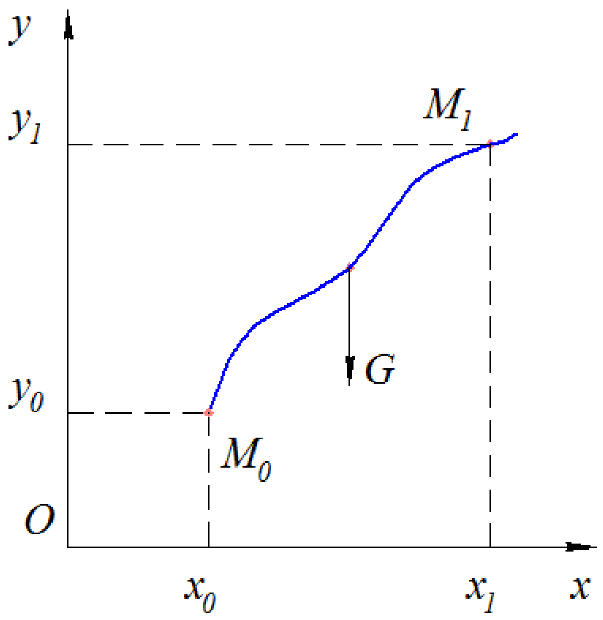
2. Если сила постоянная, то ее работу можно найти как произведение силы на перемещение. Если сила задана функцией перемещения, то необходимо вычислить интеграл от этой силы по перемещению:

$A = F_\tau S$ - для постоянной силы,

$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$ - для силы, зависящей от перемещения.

Примеры работ наиболее часто встречающихся сил.

1. Работа силы тяжести.

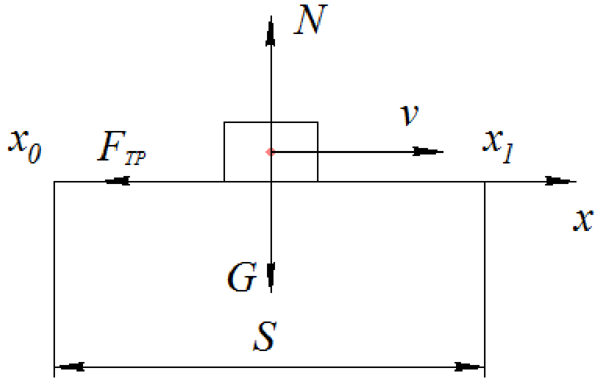


$$A(G) = \int_{x_0}^{x_1} G_x dx + \int_{y_0}^{y_1} G_y dy = -G(y_1 - y_0) = G(y_0 - y_1) = \pm Gh$$

$A(G) = \pm Gh$. Здесь h – высота изменения положения точки.

При движении вниз работа силы тяжести положительная, а при подъеме – отрицательная.

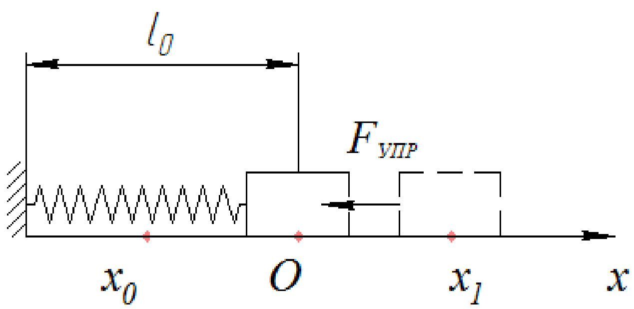
2. Работа силы трения.



$$A(F_{TP}) = \int_{x_0}^{x_1} F_{TPx}dx = -F_{TP}(x_1 - x_0) = -F_{TP}S.$$

Работа силы трения всегда отрицательная.

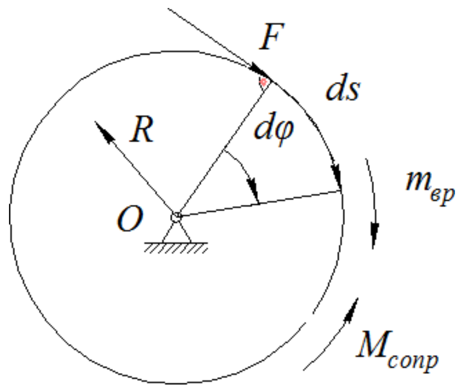
3. Работа силы упругости пружины жесткости *c*.



$$A(F_{УMP}) = \int_{x_0}^{x_1} F_{УMPx}dx = -c\int_{x_0}^{x_1} xdx = -\frac{c}{2}(x_1^2 - x_0^2) = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2)\,.$$

Здесь λ_0 *и* λ_1 - начальная и конечная деформация пружины соответственно.

4. Работа постоянной силы, приложенной к вращающемуся телу.



$$A(F) = \int F_\tau ds = \int F_\tau R d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_0(F) d\varphi = M_0(F)(\varphi_1 - \varphi_0)$$
$$= M_0(F)\varphi.$$

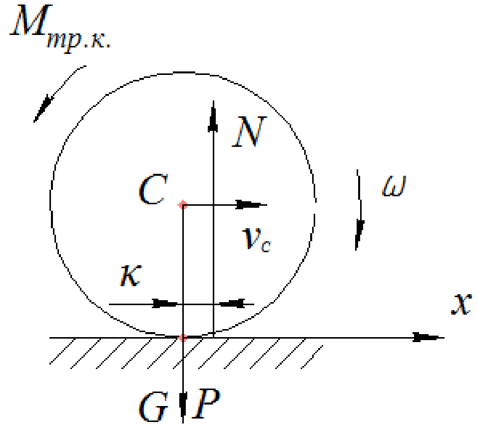
5. Работа моментов, приложенных к вращающемуся телу.

$$A(m_{BP}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} m_{BP} d\varphi.$$

Если момент постоянный, то

$$A(m_{BP}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} m_{BP} d\varphi = m_{BP}\varphi.$$

6. Работа постоянного момента сопротивления.



$$A(m_{сопр}) = -\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} m_{сопр} d\varphi = -m_{сопр}\varphi.$$

7. Работа момента трения качения.

$$A(M_{тр.к.}) = -\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_{тр.к.} d\varphi = -M_{тр.к.}\varphi = -Nk\varphi.$$

3. Мощность – это физическая величина, характеризующая работу в единицу времени:

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Если работу выполняет сила, то

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{F_\tau dS}{dt} = F_\tau v,$$

если работу выполняет момент, приложенный к телу, вращающемуся вокруг оси, проходящей через точку O, то

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{F_\tau dS}{dt} = \frac{F_\tau R d\varphi}{dt} = M_0(F_\tau)\omega.$$

Единицей измерения мощности является ватт: $[N]$= Вт.

Тема 5. Теорема об изменении кинетической энергии точки и механической системы.

Порядок решения задач.

1. Начертить расчетную схему, на которой указать действующие на механическую систему силы, скорости тел и их перемещения.

2. Вычислить кинетическую энергию механической системы, как сумму кинетических энергий тел, в нее входящих. Записать теорему об изменении кинетической энергии механической системы.

$$T_{кон} - T_0 = \sum_k A(F_k^e),$$

где F_k^e - внешние, действующие на систему силы,

$T_{кон}$ - кинетическая энергия системы в конечный момент времени,

T_0 - кинетическая энергия системы в начальный момент времени.

Если в начальный момент времени система находилась в покое, тогда $T_0 = 0$, и

$$T_{кон} = \sum_k A(F_k^e)$$

Для тела, движущегося поступательно, кинетическая энергия определяется по формуле

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2.$$

Для тела, вращающегося вокруг оси, проходящей через точку O, кинетическая энергия равна

$$T_2 = \frac{1}{2} J_O \omega_2^2.$$

Для тела, совершающего плоскопараллельное движение, которое можно рассматривать как поступательное вместе с точкой C, выбранной за полюс и вращательное вокруг этого полюса

$$T_3 = \frac{1}{2} J_C \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_3 V_C^2.$$

3. Выразить все скорости тел механической системы, через искомую (или известную) и подставить в выражение кинетической энергии системы.

4. Вычислить сумму работ внешних сил $\sum_k A(\bar{F}_k^e)$.

5. Приравнять выражения кинетической энергии и суммы работ и найти искомую величину:

$$T_{кон} = \sum_k A(\bar{F}_k^e).$$

Тема 6. Принцип Даламбера для точки и механической системы.

Порядок решения задач.

1. Изобразить на рисунке активные силы, приложенные к каждой из материальных точек или тел механической системы.

2. Применив закон освобождаемости от связей, изобразить реакции внешних связей, наложенных на каждую из материальных точек или тел системы.

3. Добавить к активным силам и реакциям связей силы инерции материальных точек или тел системы.

4. Выбрать систему координат.

5. Если надо определить реакции внутренних связей, то следует разрезать систему по линиям действия этих связей и составить уравнения равновесия для каждой из материальных точек или тел системы:

$$\sum_k F_{kx}^e + \sum_k F_{\text{ин}\,kx} = 0,$$

$$\sum_k F_{ky}^e + \sum_k F_{\text{ин}\,ky} = 0$$

6. Если надо найти реакции внешних связей, то следует составить уравнения равновесия механической системы в целом. В зависимости от того, какая система сил действует на механическую систему (произвольная плоская или пространственная), следует записать 3 или 6 уравнений равновесия этих систем сил.

7. Решив составленную систему уравнений, определить искомые величины.

Тема 7. Принцип возможных перемещений (для систем с одной степенью свободы).

Порядок решения задач.

1. Изобразить на рисунке активные силы;
2. При наличии неидеальных связей добавить соответствующие реакции связей (например, силы трения);
3. В случае необходимости определить реакцию связи, мысленно отбросить соответствующую связь и заменить ее искомой реакцией.
4. Дать возможное перемещение одной из точек системы и выразить возможные перемещения точек приложения сил в зависимости от заданного возможного перемещения.
5. Вычислить сумму работ всех сил, указанных в пунктах 1, 2 и 3 на соответствующих возможных перемещениях их точек приложения, и приравнять эту сумму нулю:

$$\sum_k \delta A(F_k^{\text{e}}) + \sum_k \delta A(F_{\text{ин}\,k}^{a}) = 0.$$

6. Решив составленное уравнение, определить искомую величину.

Тема 8. Общее уравнение динамики. Система с одной степенью свободы.

Порядок решения задач.

1. Изобразить на схеме задачи заданные силы и внешние опорные реакции, соответствующие неидеальным связям (например, силы трения и моменты трения качения).
2. Определить главные векторы и главные моменты сил инерции тел механической системы. Приложить их к телам системы.
3. Дать возможное перемещение одной из точек системы и выразить возможные перемещения точек приложения всех сил через это перемещение.
4. Определить сумму работ всех сил, указанных в пунктах 1 и 2 на возможных перемещениях точек системы.
5. Составить общее уравнение динамики, приробняв полученное выражение суммы работ к нулю.
6. Сократить полученное уравнение на заданное возможное перемещение, определить искомую величину.